

## 9. Виды распределений случайных величин

### 9.1. Биномиальный закон распределения

#### Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Пусть проведено  $n$  независимых испытаний с вероятностью  $p$  появления события  $A$  в каждом испытании (испытания Бернулли). Обозначим  $\xi$  – случайную величину, равную числу появлений события  $A$  в  $n$  испытаниях. По формуле Бернулли

$$P(\xi = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p, \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (9.1)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1.** *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое нижеприведенной таблицей, называется биномиальным.*

|       |       |             |                     |     |                     |     |             |       |
|-------|-------|-------------|---------------------|-----|---------------------|-----|-------------|-------|
| $\xi$ | 0     | 1           | 2                   | ... | $k$                 | ... | $n-1$       | $n$   |
| $P$   | $q^n$ | $npq^{n-1}$ | $C_n^2 p^2 q^{n-2}$ | ... | $C_n^k p^k q^{n-k}$ | ... | $np^{n-1}q$ | $p^n$ |

Биномиальное распределение определяется двумя параметрами  $n$  и  $p$ .

Математическое ожидание и дисперсия для биномиально распределённой случайной величины  $\xi$  вычисляется по формулам:

$$M(\xi) = np; \quad D(\xi) = npq. \quad (9.2)$$

**ПРИМЕР 9.1.** *Вероятность попадания стрелком в мишень равна 0,8. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины  $\xi$  – числа попаданий в мишень при трёх выстрелах. Найти  $M(\xi)$  и  $D(\xi)$ .*

◀ Данная случайная величина имеет следующие возможные значения: 0 (стрелок не попал в мишень ни разу), 1 (попал один раз), 2 (попал два раза), 3 (ни разу не промахнулся). Здесь  $p = 0,8$ ,  $q = 1 - p = 0,2$ ,  $n = 3$ .

По формуле Бернулли (9.1) найдем:

$$P(0) = C_3^0 \cdot (0,8)^0 \cdot (0,2)^3 = \frac{1}{125}, \quad P(1) = C_3^1 \cdot (0,8)^1 \cdot (0,2)^2 = \frac{12}{125},$$

$$P(2) = C_3^2 \cdot (0,8)^2 \cdot (0,2)^1 = \frac{48}{125}, \quad P(3) = C_3^3 \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^0 = \frac{64}{125}.$$

Отметим, что  $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1$ .

Ряд распределения примет вид:

|       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\xi$ | 0     | 1     | 2     | 3     |
| $P$   | 0,008 | 0,096 | 0,384 | 0,512 |

Найдём  $M(\xi)$  и  $D(\xi)$  двумя способами.

1 способ. По общим формулам для дискретной случайной величины.

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^3 x_k p_k = 0 \cdot 0,008 + 1 \cdot 0,096 + 2 \cdot 0,384 + 3 \cdot 0,512 = 2,4.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 0^2 \cdot 0,008 + 1^2 \cdot 0,096 + 2^2 \cdot 0,384 + 3^2 \cdot 0,512 - 2,4^2 = 0,48.$$

2 способ. По формулам (??) для биномиального распределения.

$$M(\xi) = np = 3 \cdot 0,8 = 2,4 \quad D(\xi) = npq = 2,4 \cdot 0,2 = 0,48. \blacktriangleright$$

**ПРИМЕР 9.2.** На складе 20% приборов являются неточными. Взяты 5 приборов для проверки. Составить таблицу распределения случайной величины  $\xi$  – числа точных приборов среди проверенных. Определить математическое ожидание  $M(\xi)$  и  $D(\xi)$ .

◀ Вероятность отбора неточного прибора  $q = 0,2$ , а точного прибора  $p = 1 - q = 0,8$ . В данной задаче имеем биномиальное распределение. Запишем ряд распределения:

|       |         |                               |                                 |                                 |                               |
|-------|---------|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| $\xi$ | 0       | 1                             | 2                               | 3                               | 4                             |
| $p$   | $0,2^5$ | $C_5^1 \cdot 0,8 \cdot 0,2^4$ | $C_5^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3$ | $C_5^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2$ | $C_5^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2$ |
| $\xi$ | 5       |                               |                                 |                                 |                               |
| $p$   | $0,8^5$ |                               |                                 |                                 |                               |

Для получения числовых значений используем Maxima-программу:

```
(%i1) load(distrib)$ fpprintprec:4$
(%i3) P: makelist(pdf_binomial(k, 5, 0.8), k, 0, 5);
(%o4) [3.2 * 10^-4, 0.0064, 0.0512, 0.205, 0.41, 0.328]
```

MathCad-программа решения этой задачи:

```
k := 0..5    P_k := dbinom(k, 5, 0.8)
P = (3.2 * 10^-4  6.4 * 10^-3  0.051  0.205  0.41  0.328)
```

Согласно формулам (9.2), математическое ожидание

$$M(\xi) = np = 5 \cdot 0,8 = 4, \text{ а дисперсия } D(\xi) = npq = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,8.$$

Ответ:  $M(\xi) = 4$ ,  $D(\xi) = 0,8$ . ▶

**ПРИМЕР 9.3.** В партии поступивших на склад деталей 10% бракованные. Случайным образом выбрали  $n=15$  деталей. Случайная величина  $\xi$  – число бракованных деталей среди выбранных. Составить ряд распределения случайной величины  $\xi$ . Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\xi$ . Какова вероятность, что будет выбрано более трёх бракованных деталей. Построить график ряда распределения случайной величины  $\xi$ .

◀ По формуле Бернулли (12.1) найдем:

$$P(\xi = k) = C_n^k \cdot (0,1)^k \cdot (0,9)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 15.$$

Для вычисления математического ожидания применяем формулу  $M(\xi) = \sum_{k=0}^{15} k \cdot P(\xi = k)$ .

Для вычисления дисперсии применяем формулу

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi), \quad \text{где } M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{15} k^2 \cdot P(\xi = k).$$

Для вычисления вероятности, что будет выбрано более трёх бракованных деталей находим

$$P_{\_3\_15} = \sum_{k=4}^{15} P(\xi = k) \text{ или } P_{\_3\_15} = 1 - \sum_{k=0}^3 P(\xi = k) .$$

Выполнять такой огромный объём работы долго и неинтересно, поэтому пишем *Maxima*-программу, которая по приведённым формулам получит и выведет все требуемые результаты. Программа очень простая и понятная. При помощи встроенной функцией ***pdf\_binomial***(k, n, p) которая вычисляет по формулам (9.1) значения полученного ряда распределения. Создаём массив *P*, в который записываем полученные значения. В список *G* записываем значения координат точек для построения графика. Функция *plot2d*, по координатам списка *G* строит график, рис. 34. Используя функцию ***sum***, находим математическое ожидание *M*, дисперсию *D* случайной величины  $\xi$  и искомую вероятность *P\_3\_15*.

```
kill(all)$ load(distrib)$ fpprintprec:3$ n:15$ p:0.1$
array(P,n)$
fillarray(P,makelist(pdf_binomial(k, n, p), k, 0, n))$
G:makelist([k,P[k]],k,0,n);
plot2d([discrete,G], [x,0,8],[style,points],
        [gnuplot_postamble, "set grid;"])$
M:sum(k*P[k],k,0,n);
D:sum(k^2*P[k],k,0,n)-M^2;
P_3_15:sum(P[k],k,4,n);
Результаты
(G) [[0,0.206],[1,0.343],[2,0.267],[3,0.129],[4,0.043],[5,0.011],
      [6,0.00194],[7,2.77*10^-4],[8,3.08*10^-5],[9,2.66*10^-6],
      [10,1.77*10^-7],[11,8.96*10^-9],[12,3.32*10^-10],
      [13,8.51*10^-12],[14,1.35*10^-13],[15,1.0*10^-15]]
(M) 1.5
(D) 1.35
(P_3_15) 0.0556
```



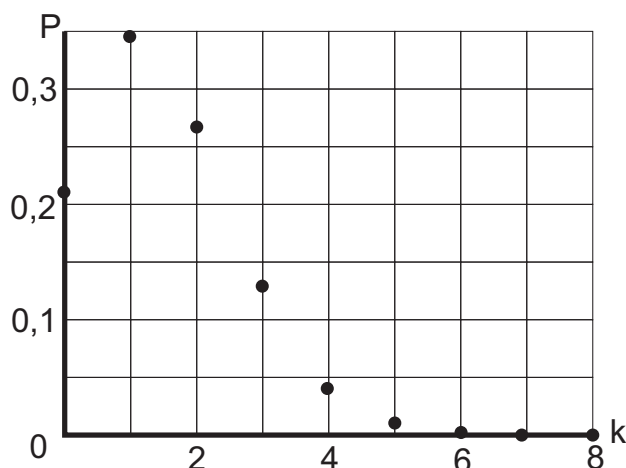


Рис. 34. Биномиальное распределение для примера 9.3

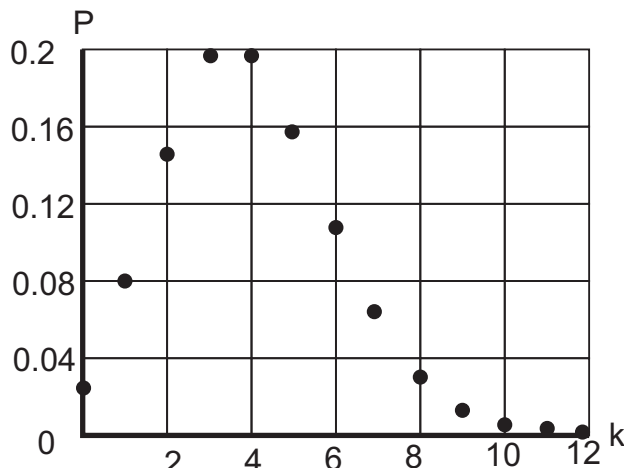


Рис. 35. Распределения Пуассона для примера 9.5

## 9.2. Распределение Пуассона

### Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Пусть в испытаниях Бернулли  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ , так, что  $np \rightarrow \lambda$ . Тогда вероятность  $P_n(m)$  приближённо определяется с помощью формулы Пуассона:

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0. \quad (9.3)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2.** Распределение дискретной случайной величины, задаваемое формулой (9.3), называется распределением Пуассона или пуассоновским распределением.

Запишем закон распределения Пуассона в виде таблицы:

| $\xi$ | 0              | 1                      | 2                                   | ... | $m$                                 | ... |
|-------|----------------|------------------------|-------------------------------------|-----|-------------------------------------|-----|
| $p$   | $e^{-\lambda}$ | $\lambda e^{-\lambda}$ | $\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$ | ... | $\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ | ... |

Итак, для случайной величины, имеющей распределение Пуассона, получим:

$$M(\xi) = D(\xi) = \lambda. \quad (9.4)$$

**ПРИМЕР 9.4.** Вероятность того, что изделие окажется бракованным, равна 0,02. Производится выборка 120 изделий. Записать закон распределения числа бракованных изделий в выборке. Найти  $M(\xi)$  и  $D(\xi)$ .

◀ Здесь  $n = 120$  и  $p = 0,02$ . Поскольку первая величина больше 100, а вторая – меньше 0,1, то для решения задачи можно применить формулу

Пуассона (9.3). Параметр  $\lambda = np = 120 \cdot 0,02 = 2,4$ ; из таблицы найдем, что  $e^{-2,4} = 0,0907$ . Тогда

$$P(\xi = 0) = \frac{2,4^0 \cdot e^{-2,4}}{0!} = 0,0907, \quad P(\xi = 1) = \frac{2,4^1 \cdot e^{-2,4}}{1!} = 0,2177,$$

$$P(\xi = 2) = 0,2612, \quad P(\xi = 3) = 0,2090, \dots$$

Здесь наибольшая вероятность при  $k = 2$ . Распределение Пуассона можно записать следующим образом:

|       |        |        |        |        |     |                           |     |
|-------|--------|--------|--------|--------|-----|---------------------------|-----|
| $\xi$ | 0      | 1      | 2      | 3      | ... | k                         | ... |
| p     | 0,0907 | 0,2177 | 0,2612 | 0,2090 | ... | $2,4^k \cdot e^{-2,4}/k!$ | ... |

$$M(\xi) = \lambda = 2,4 \quad D(\xi) = \lambda = 2,4.$$

Для вычисления распределения Пуассона  $P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$  в компьютерный пакет Maxima встроена функция pdf\_poisson(m, a), а в пакет MathCad – dpois(m, λ).

Maxima-программа.

```
(%i1) load(distrib)$
(%i2) fpprintprec:5$ n:120$ p:0.02$ a:n*p;
(%i5) P:makelist(pdf_poisson(k, a), k, 0, n);
(%o5) [0.091, 0.218, 0.261, 0.209, 0.125, 0.06, 0.024, 0.008, ...
```



**ПРИМЕР 9.5.** В партии поступивших на склад деталей 1% бракованные. Случайным образом выбрали  $n=400$  деталей. Случайная величина  $\xi$  — число бракованных деталей среди выбранных. Составить ряд распределения случайной величины  $\xi$ . Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\xi$ . Какова вероятность, что будет выбрано более пяти бракованных деталей. Построить график ряда распределения случайной величины  $\xi$  на отрезке  $x \in [0; L + 4\sigma(\xi)]$ , где  $\sigma(\xi)$  —среднеквадратическое отклонение случайной величины  $\xi$ .

◀Этот пример подобен решённому выше примеру 9.3, только число испытаний значительно больше и применения формул Бернулли затруднительно.

Применяем формулы Пуассона (9.3). Здесь  $\lambda = np = 400 \cdot 0,01 = 4$ .

$$P(\xi = k) = \frac{4^k}{k!} e^{-4}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Для вычисления математического ожидания и дисперсии применяем формулу  $M(\xi) = D(\xi) = \lambda = 4$ .  $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = 2$ .

Пишем Maxima-программу, которая по приведённым формулам получит и выведет все требуемые результаты и строит график функции распределения на отрезке  $x \in [0; 12]$ , рис. 35.

```
kill(all)$ load(distrib)$ fpprintprec:3$ n:400$ p:0.01$ L:n*p;
M:L$ D:L$ S:sqrt(D); m1:0$ m2:fix(L+4*S);
array(P,100)$
fillarray(P,makelist(L^k/k!*exp(-L), k, 0 ,m2))$
G:makelist([k,P[k]],k,m1,m2);
plot2d([discrete,G], [x,m1,m2],[gnuplot_postamble, "set grid;"])$
P_5_n:1-sum(P[k],k,0,5);
```

Вывод программы

```
(L) 4.0
(S) 2.0
(m2) 12
(G) [[0,0.0183],[1,0.0733],[2,0.147],[3,0.195],[4,0.195],
[5,0.156],[6,0.104],[7,0.0595],[8,0.0298],[9,0.0132],
[10,0.00529],[11,0.00192],[12,6.42*10^-4]]
(P_5_n) 0.215
```



**ПРИМЕР 9.6.** В диспетчерской автопредприятия среднее число заявок, поступающих в одну минуту, равно 2. Найти вероятности того, что за одну минуту: не поступит вызова, поступит 1, 2, 3, ... вызовов.

◀Количество вызовов  $\xi$ , поступивших за время  $t$ , имеет распределение Пуассона:

$$P_t(\xi = k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!},$$

где  $\lambda$  – среднее число событий в единицу времени (интенсивность). В данном случае  $\lambda = 2$ ,  $t = 1$ . Следовательно,

$$P_1(\xi = 0) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} \approx 0,135, \quad P_1(\xi = 1) = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} \approx 0,271,$$

$$P_1(\xi = 2) = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} \approx 0,271, \quad P_1(\xi = 3) = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} \approx 0,180, \dots$$

Ответ: 

|       |       |       |       |       |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $\xi$ | 0     | 1     | 2     | 3     | ... |
| $P$   | 0,135 | 0,271 | 0,271 | 0,180 | ... |

 ►

### 9.3. Геометрическое распределение

#### Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Пусть производится ряд независимых испытаний («попыток») для достижения некоторого результата (события  $A$ ), и при каждой попытке событие

$A$  может появиться с вероятностью  $p$ . Тогда число попыток  $\xi$  до появления события  $A$ , включая удавшуюся, является дискретной случайной величиной, возможные значения которой принимают значения:  $m = 1, 2, \dots, m, \dots$ . Вероятности их по теореме умножения вероятностей для независимых событий равны

$$P(\xi = m) = pq^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (9.5)$$

где  $0 < p < 1$ ,  $q = 1 - p$ .

Ряд распределения  $\xi$  имеет вид

|       |     |      |        |     |            |     |
|-------|-----|------|--------|-----|------------|-----|
| $\xi$ | 1   | 2    | 3      | ... | $m$        | ... |
| $P$   | $p$ | $pq$ | $pq^2$ | ... | $pq^{m-1}$ | ... |

$$M(\xi) = \frac{1}{p}, \quad D(\xi) = \frac{q}{p^2}. \quad (9.6)$$

**ПРИМЕР 9.7.** Детали, количество которых неограниченно, проверяют до появления бракованной. Вероятность брака для каждой детали одинакова и равна 0,6. Построить ряд распределения дискретной случайной величины  $\xi$  — числа проверенных деталей. Найти математическое ожидание  $M(\xi)$ , дисперсию  $D(\xi)$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma(\xi)$  случайной величины  $\xi$ . Какова вероятность, что будет проверено более четырёх деталей. Построить график ряда распределения случайной величины  $\xi$  на отрезке  $k \in [0; 8]$ .

◀ Используем формулу для геометрического распределения (9.5) при  $p = 0,6$ ,  $q = 0,4$ .

$$P(\xi = k) = 0,6 \cdot 0,4^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$P(\xi = 1) = 0,6; \quad P(\xi = 2) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24;$$

$$P(\xi = 3) = 0,6 \cdot 0,4^2 = 0,096; \quad P(\xi = 4) = 0,6 \cdot 0,4^3 = 0,0384; \dots$$

$$P_{\_5\_n} = 1 - (0,6 + 0,24 + 0,096 + 0,0384) = 0,0256.$$

Maxima-программа:

```
kill(all)$ load(distrib)$ fpprintprec:3$
p:0.6$ q:1-p; K:8$
M:1/p; D:q/p^2; S:sqrt(D);
P:makelist(p*q^(k-1), k, 1, K);
P_5_n:1-sum(P[k], k, 1, 4);
plot2d([discrete,P], [x,1,K],[style,points]
[gnuplot_postamble, "set grid;"])$
```



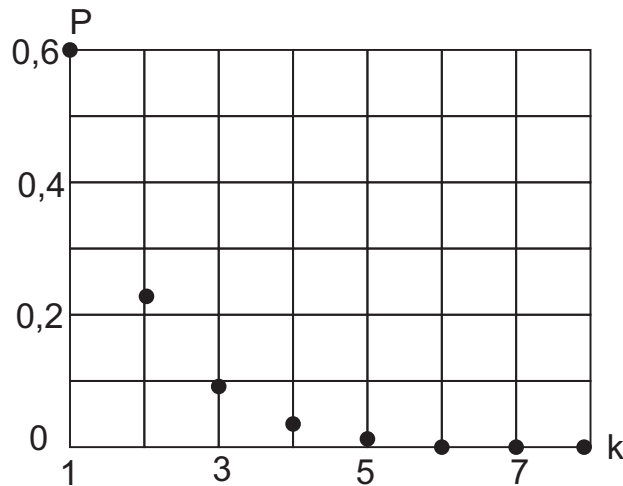


Рис. 36. Геометрическое распределения для примера 9.7

## 9.4. Задачи из типового расчета

### Задача 1.8

ПРИМЕР 9.8. Производится стрельба по мишени. Случайная величина  $\xi$  – число попаданий в цель.

а) Вероятность попадания при каждом выстреле 0,6. Было произведено 12 независимых выстрелов. Найти математическое ожидание и дисперсию  $\xi$ . Определить вероятность того, что будет не менее 10 попаданий в цель.

б) Вероятность промаха при каждом выстреле 0,99 и было произведено 200 независимых выстрелов. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\xi$ . Определить вероятность того, что будет более двух попаданий в цель.

$$\blacktriangleleft M(\xi) = np = 12 \cdot 0,6 = 7,2, D(\xi) = npq = 7,2 \cdot 0,4 = 2,88.$$

По формуле Бернулли  $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$  найдем:

$$P_{12}(10) = C_{12}^{10} \cdot 0,6^{10} \cdot 0,4^2 = 66 \cdot 0,6^{10} \cdot 0,4^2 \approx 0,0639.$$

$$P_{12}(11) = C_{12}^{11} \cdot 0,6^{11} \cdot 0,4 = 12 \cdot 0,6^{11} \cdot 0,4 \approx 0,0174.$$

$$P_{12}(12) = 0,6^{12} \approx 0,0022.$$

$$P(A) = P_{12}(10) + P_{12}(11) + P_{12}(12) \approx 0,0639 + 0,0174 + 0,0022 = 0,0835.$$

б) Вероятность промаха равна 0,99, следовательно вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,01.

Применяем формулу для распределения Пуассона

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

$$\lambda = np = 2$$

$$M(\xi) = D(\xi) = \lambda = 2.$$

$$P(A) = 1 - (P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2))$$

$$P(\xi = 0) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = 0,1353.$$

$$P(\xi = 1) = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = 0,2707$$

$$P(\xi = 2) = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = 0,2707$$

$$P(A) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2)) = 0,323. \blacktriangleright$$

### Задача 1.9

**ПРИМЕР 9.9.** Кубик бросают до первого появления шестерки или пятерки (число бросков неограниченно). Построить ряд распределения дискретной случайной величины  $\xi$  — числа произведённых бросков. Найти математическое ожидание и дисперсию  $\xi$ . Найти вероятность того, что будет произведено от двух до пяти (включительно) бросков.

◀ Используем формулу для геометрического распределения (9.5)

$$P(\xi = m) = pq^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots, \text{ при } p = 1/3, \quad q = 2/3.$$

$$P(\xi = k) = 1/3 \cdot (2/3)^{k-1} = 2^{k-1}/3^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$P(\xi = 1) = 1/3; \quad P(\xi = 2) = 1/3 \cdot 2/3 = 2/9;$$

$$P(\xi = 3) = 1/3 \cdot (2/3)^2 = 4/27; \quad P(\xi = 4) = 1/3 \cdot (2/3)^3 = 8/81;$$

$$P(\xi = 5) = 1/3 \cdot (2/3)^4 = 16/243; \dots$$

| $\xi$ | 1   | 2   | 3    | 4    | 5      | ... | $k$           | ... |
|-------|-----|-----|------|------|--------|-----|---------------|-----|
| $P$   | 1/3 | 2/9 | 4/27 | 8/81 | 16/243 | ... | $2^{k-1}/3^k$ | ... |

$$M(\xi) = \frac{1}{p} = 3.$$

$$D(\xi) = \frac{q}{p^2} = 6.$$

$$P = 2/3^2 + 4/3^3 + 8/3^4 + 16/3^5 = \frac{54 + 36 + 24 + 16}{343} = \frac{130}{243} \approx 0,535.$$

▶

### 9.5. Равномерное распределение

Из непрерывных законов на этом занятии изучим равномерное и экспоненциальное распределения.

#### Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Распределение непрерывной случайной величины называется *равномерным* на  $[a; b]$ , если плотность распределения постоянна и отлична от 0 на этом отрезке и равна нулю вне его:

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{при } x \in [a; b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Плотность равномерно распределённой на  $[a; b]$  случайной величины определяется по формуле:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } x \in [a; b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a; b]. \end{cases} \quad (9.7)$$

Функция распределения равномерно распределённой на  $[a; b]$  случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{при } b < x. \end{cases} \quad (9.8)$$

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}; \quad D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (9.9)$$

**ПРИМЕР 9.10.** Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,1. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при снятии показаний прибора будет сделана ошибка, превышающая 0,03.

❖ Ошибку округления до ближайшего целого деления можно рассматривать как случайную величину  $\xi$ , которая распределена равномерно между двумя целыми делениями. Плотность равномерного распределения находим по формуле (9.7), где длина интервала  $b-a$  в данной задаче равна 0,1. Ошибка отсчёта превысит 0,03, если она будет заключена в интервале  $(0,03; 0,07)$ . По формуле

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } x \in [0; 0,1], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; 0,1]. \end{cases}$$

найдем:

$$P(0,03 < \xi < 0,07) = \int_{0,03}^{0,07} 10 dx = 0,4.$$

Ответ: 0,4. ►

**ПРИМЕР 9.11.** Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\xi$ , распределённой равномерно в отрезке  $[1, 9]$ .

◀ Математическое ожидание и дисперсия определяются в данном случае выражениями (9.9). Так как  $a = 1$ ,  $b = 9$ , то сразу найдем

$$M(\xi) = \frac{1+9}{2} = 5, \quad D(\xi) = \frac{(9-1)^2}{12} = \frac{16}{3} \approx 5,333.$$

Ответ:  $M(\xi) = 5$ ,  $D(\xi) = 16/3 \approx 5,333$ . ►

**ПРИМЕР 9.12.** Случайная величина  $\xi$  распределена равномерно с  $M(\xi) = 9/2$  и  $D(\xi) = 25/12$ . Найти функцию распределения случайной величины  $\xi$ .

◀ Функция распределения в формуле (9.8) зависит от параметров  $a$  и  $b$ . Используя (9.9), для определения  $a$  и  $b$  составим следующие уравнения:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{9}{2}, \quad \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{25}{12}.$$

Отсюда, с учётом того, что  $b > a$ , получим  $a = 2$ ,  $b = 7$ . Функция распределения окончательно примет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2, \\ \frac{x-2}{5} & \text{при } x \in (2, 7], \\ 1 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

►

## 9.6. Показательное распределение

### Необходимый теоретический материал из лекции 5.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3.** Распределение непрерывной случайной величины называется *экспоненциальным (показательным)*, если плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad \text{где } \lambda > 0. \quad (9.10)$$

Экспоненциальное распределение определяется одним параметром  $\lambda > 0$ .

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (9.11)$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (9.12)$$

ПРИМЕР 9.13. Для какого значения  $a$  функция  $f(x) = ae^{-\lambda x}$  при  $x \geq 0$  и  $f(x) = 0$  при  $x < 0$  является плотностью показательного закона?

◀ Так как  $f(x) = 0$  при  $x < 0$ , то

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} ae^{-\lambda x} dx = 1.$$

Отсюда

$$-\frac{a}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = 1 \Rightarrow a/\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = a.$$

Ответ:  $a = \lambda$ . ▶

ПРИМЕР 9.14. Непрерывная случайная величина  $\xi$  распределена по показательному закону (12.2) с параметром  $\lambda = 0,07$ . Найти плотность распределения случайной величины  $\xi$ , её функцию распределения, построить графики этих функций. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины  $\xi$  и вероятность того, что в результате испытания  $\xi$  попадёт в интервал  $(2, 10)$ .

◀ С учётом (9.12) математическое ожидание  $M(\xi) = 1/\lambda = 1/0,07 = 100/7 \approx 14,286$ .

С другой стороны, используя выражение (9.11) для функции распределения, искомую вероятность найдем как приращение этой функции на интервале  $(2, 10)$ :

$$P(2 < \xi < 10) = F(10) - F(2) = 1 - e^{-0,7} - 1 + e^{-0,14} \approx 0,8693 - 0,4965 = 0,373.$$

Эту же вероятность можно вычислить как

$$P(2 < \xi < 10) = \int_2^{10} 0,07 e^{-0,07t} dt = -e^{-0,07t} \Big|_2^{10} \approx 0,373.$$

Ответ:  $P(2 < \xi < 10) \approx 0,373$ . ▶

ПРИМЕР 9.15. Время безотказной работы элемента распределено по экспоненциальному закону  $f(x) = 0,03 \cdot e^{-0,03t}$  ( $t > 0$ ). Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 200 часов.

◀ Длительность времени безотказной работы элемента имеет экспоненциальное распределение, у которого функция распределения  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ .

Тогда вероятность безотказной работы  $t$  (так называемая функция надежности) имеет вид:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t},$$

где  $\lambda$  – интенсивность отказов или среднее число отказов в единицу времени. В данном примере интенсивность отказов  $\lambda = 0,03$ . Искомая вероятность

$$R(200) = e^{-0,03 \cdot 200} = e^{-6} \approx 0,003.$$



## Задания для самостоятельной работы

**9.1.** Вероятность того, что расход горючего одним автомобилем в день не будет превышать нормы равна 0,9. Найти вероятность того, что из четырёх машин автобазы расход горючего за день будет в норме для  $k$  автомобилей ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ).

**9.2.** В цехе находится четыре станка. Вероятность того, что каждый из них будет остановлен в течение определённого отрезка времени для смены деталей, равна 0,3. Определить вероятности того, что за это время будут остановлены 0, 1, 2, 3, 4 станка. Найти математическое ожидание и дисперсию числа остановившихся станков.

**9.3.** Завод отправил на базу 300 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,01. Составить ряд распределения числа повреждённых изделий в пути. Воспользоваться законом Пуассона.

**9.4.** Брак продукции цеха составляет 4%. Определить математическое ожидание и дисперсию числа забракованных изделий цеха из 150 проверенных.

**9.5.** Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,005. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Чему равны дисперсия и среднее число абонентов, которые позвонят на коммутатор в течение часа? Воспользоваться законом Пуассона.

**9.6.** Интервал движения трамвая 6 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать трамвай менее 4 минут.

**9.7.** Время ожидания у бензоколонки автозаправочной станции является случайной величиной  $\xi$ , распределённой по показательному закону со средним временем ожидания, равным 10 минут. Найти вероятности того, что: а)  $5 \text{ мин} < \xi < 15 \text{ мин}$ , б)  $\xi \geq 20 \text{ мин}$ .

### Домашнее задание.

Выполнить задание 1.8, 1.9, 1.11 и 1.12 типового расчёта.