8. Непрерывные случайные величины

8.1. Функции распределения и плотности непрерывной случайной величины

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Определение 8.1. *Функцией распределения $F(x)$ случайной величины ξ называется вероятность того, что ξ приняла значение меньшее x:*

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{8.1}$$

Определение 8.2. *Функция $F(x)$ обладает кусочно непрерывной производной, если её производная $F'(x)$ непрерывна везде, кроме конечного (или бесконечного счётного) множества точек, в которых $F'(x)$ может иметь разрывы 1-го рода.*

В частности, если производная $F'(x)$ непрерывна, то она кусочно непрерывна, т.к. множество точек разрыва пусто.

Определение 8.3. *Случайная величина ξ называется **непрерывной**, если её функция $F(x)$ непрерывна и обладает кусочно непрерывной производной $F'(x)$.*

Свойства функции распределения непрерывной случайной величины :

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1,\ F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$;

(2) $P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$;

(3) $F(x)$ не убывает;

(4) $F(x)$ непрерывна;

(5) $P(\xi = a) = 0$ для любого числа a.

Используя определение функции распределения (8.1), рассмотрим ряд задач и на непрерывные случайные величины.

В соответствии с только что сделанным замечанием вероятность попадания случайной величины в заданный промежуток зависит от скорости роста функции распределения. Поэтому непрерывную случайную величину задают, используя производную от функции распределения.

Определение 8.4. *Плотностью распределения $f(x)$ (или дифференциальной функцией распределения) непрерывной случайной величины ξ называют первую производную от её функции распределения:*

$$f(x) = F'(x). \tag{8.2}$$

Замечание 8.1. *Поскольку функция распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатую форму, для её описания плотность распределения неприменима.*

Свойства плотности распределения:

(1) $f(x) \geqslant 0$;

(2) $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$;

(3) $f(x)$ кусочно непрерывная функция;

(4) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$;

(5) $P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$;

(6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Пример 8.1. *Случайная величина ξ задана функцией распределения*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x \leqslant -2, \\ (x+2)^2 \text{ } при \text{ } -2 < x \leqslant -1, \\ 1 \text{ } при \text{ } x > -1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина ξ примет значение, заключенное в интервале $(-3/2; -1)$.

◀Вероятность того, что ξ примет значение, заключенное в интервале $(-3/2; -1)$, равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(-3/2 < \xi < -1) = F(-1) - F(-3/2) = (-1+2)^2 - (-3/2+2)^2 = \dfrac{3}{4}$.▶

Ответ: 0,75.

Пример 8.2. *Непрерывная случайная величина* ξ *задана плотностью распределения* $f(x) = \cos x$ *в интервале* $(0{,}\pi/2)$*; вне этого интервала* $f(x) = 0$*. Найти вероятность того, что* ξ *примет значение, принадлежащее интервалу* $(\pi/4, \pi/3)$*.*

◀Применим формулу

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

По условию, $a = \pi/4$, $b = \pi/3$, $f(x) = \cos x$. Следовательно, данная вероятность

$$P\left(\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{3}\right) = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos x dx = \sin x\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}159.$$▶

Ответ: $\approx 0{,}159$.

Пример 8.3. *Дана функция распределения непрерывной случайной величины* ξ

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ A(x-1)^2 \text{ при } 1 < x \leqslant 3, \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Найти значение величины A *и плотность распределения* $f(x)$.

◀Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 2A(x-1) \text{ при } 1 < x \leqslant 3, \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Для определения A используем свойство функции плотности вероятностей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Подставляем полученную функцию $f(x)$.

$$\int_1^3 2A(x-1)dx = 2A\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^3 = 2A\left(\left(\frac{9}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right) = 4A.$$

Следовательно, $A = \dfrac{1}{4}$.

Рассмотрим более простой метод определения параметра A. Функция распределения $F(x)$ определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$. При $x = 3$ предел справа функции распределения равен 1, следовательно и предел слева также обязан выть равен 1. Получаем уравнение

$$A(3-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 0{,}5(x-1) \text{ при } 1 < x \leqslant 3, \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases} \qquad \blacktriangleright$$

Пример 8.4. *ξ – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, заданной следующим образом:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ A(4x - x^2), \text{ если } 0 < x \leqslant 4, \\ 0, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) значение параметра A б) вероятность попадания ξ в интервал $(1; 2)$; в) функцию распределения $F(x)$.

◀а)

$$\int\limits_0^4 A(4x - x^2)dx = A\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = A\left(32 - \frac{64}{3} - 0\right) = \frac{32A}{3}.$$

$$\frac{32A}{3} = 1 \qquad \Rightarrow A = \frac{3}{32}.$$

б) Вероятность

$$P(1 < \xi < 2) = \int\limits_1^2 f(x)dx = \int\limits_1^2 \frac{3}{32}(4x - x^2)dx = \frac{3}{32}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 =$$

$= \dfrac{11}{32} \approx 0{,}344.$

в) Функция распределения $F(x)$ для непрерывной случайной величины даётся формулой

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Если $-\infty < x \leqslant 0$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

если $0 < x \leqslant 4$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int\limits_0^x f(t)dt = \frac{6x^2 - x^3}{32};$$

если, наконец, $x > 4$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{4} \frac{3}{32}(4t - t^2)dt + \int\limits_{4}^{x} 0dt = 1.\blacktriangleright$$

Ответ: $P(1 < \xi < 2) = 11/32 \approx 0{,}344$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \dfrac{6x^2 - x^3}{32}, \text{ если } 0 < x \leqslant 4, \\ 1, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Пример 8.5. *Случайная величина ξ имеет на всей числовой оси плотность распределения $f(x) = a/(1 + x^2)$ (закон Коши). Найти параметр a и функцию распределения $F(x)$.*

$\blacktriangleleft$Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1 + x^2}dx = a \cdot \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a\pi = 1.$$

Отсюда найдем, что $a = 1/\pi$, а плотность распределения $f(x) = 1/\pi(1 + x^2)$. Функция распределения

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\pi(1 + t^2)} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} t\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x.\blacktriangleright$$

Ответ: $a = 1/\pi \approx 0{,}318$, $F(x) = 0{,}5 + \operatorname{arctg}(x)/\pi$.

8.2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Определение 8.5. *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $f(x)$ называется:*

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \tag{8.3}$$

Замечание 8.2. *Если $\eta = \varphi(\xi)$ — непрерывная функция случайного аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то*

$$M(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x) dx, \tag{8.4}$$

где $f(x)$ – плотность распределения ξ.

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x) dx, \tag{8.5}$$

r

Определение дисперсии как математического ожидания квадрата отклонения полностью сохраняется для непрерывных случайных величин:

$$D(\xi) = M\big(\xi - M(\xi)\big)^2.$$

Вычисление дисперсии непрерывной случайной величины следует вести по следующей формуле:

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(\xi)\big)^2 f(x) dx. \tag{8.6}$$

На практике проще применять формулу

$$D(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi). \tag{8.7}$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, приведённые в предыдущей для ДСВ, сохраняются в этом случае.

Если $\eta = \varphi(\xi)$ — функция случайного аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то

$$D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(\varphi(x) - M(\varphi(x))\big)^2 f(x)dx, \tag{8.8}$$

или

$$D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x)\,dx - M^2(\varphi(\xi)). \tag{8.9}$$

Пример 8.6. *Случайная величина ξ задана плотностью распределения $f(x) = x/8$ в интервале $(0,4)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины ξ.*

◀Поскольку плотность равна 0 вне (0, 4), подставив $f(x) = x/8$, получим

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \frac{1}{8}\int\limits_{0}^{4} x^2 dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^4 = \frac{8}{3} \approx 2{,}667.$$

Дисперсия

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(\xi)$$

или

$$D(\xi) = \frac{1}{8}\int_0^4 x^3 dx - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^4 - \frac{64}{9} = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889.$$ ▶

Ответ: $M(\xi) = 8/3 \approx 2{,}667,\ D(\xi) = 8/9 \approx 0{,}889.$

Пример 8.7. *График плотности вероятности случайной величины ξ изображен на рисунке 31 (закон Симпсона). Найти математическое ожидание и дисперсию.*

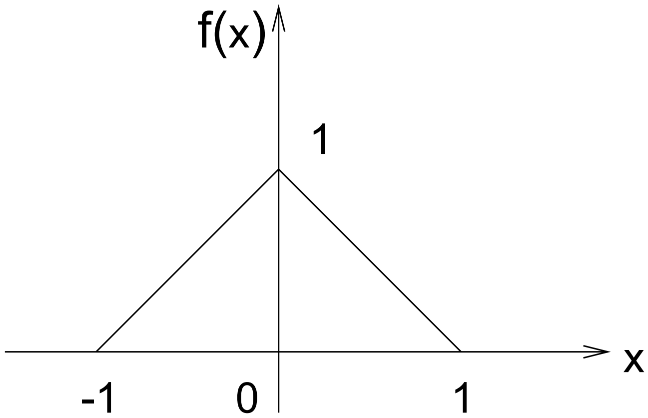

Рис. 31. *График плотности распределения примера 8.7*

◀Из графика $f(x)$ видно, что плотность вероятности определяется уравнениями:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ при } x\in(-1,0),\\ -x+1 \text{ при } x\in(0,1),\\ 0 \text{ при } x\leqslant -1,\ x\geqslant 1.\end{cases}$$

Поскольку $f(x)$ задана на интервале $(-1,1)$ двумя аналитическими выражениями, то

$$M(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-1}^{0} x(x+1)dx+\int\limits_{0}^{1} x(-x+1)dx=0.$$

Можно было без вычислений заметить, что $M(\xi)=0$. Это следует из чётности функции плотности.

Далее, учитывая, что $M(\xi)=0$, найдем дисперсию

$$D(\xi)=\int\limits_{-1}^{0} x^2(x+1)dx+\int\limits_{0}^{1} x^2(-x+1)dx=\frac{1}{6}\approx 0{,}167.$$ ▶

Ответ: $M(\xi)=0,\ D(\xi)=1/6\approx 0{,}167$.

Пример 8.8. *Случайная величина ξ задана плотностью распределения $f(x) = A\sin 2x$ в интервале $(0, \pi/2)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины ξ.*

◀Заданная функция может быть функцией плотностью, если она неотрицательна и площадь между графиком функции и осью абсцисс равна 1. Получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = A\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2xdx = -0{,}5A\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = \\ = -0{,}5A(\cos\pi - \cos 0) = A.$$

При $A = 1$ все требования к функции плотности выполняются.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} x\sin 2xdx = -0{,}5\int\limits_0^{\pi/2} xd\cos 2x = \\ = -0{,}5x\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} + 0{,}5\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx = \\ = -0{,}5(\frac{\pi}{2}\cos\pi - 0\cos 0) + 0{,}25\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} = \pi/4.$$

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} x^2\sin 2xdx = -0{,}5\int\limits_0^{\pi/2} x^2 d\cos 2x = \\ = -0{,}5x^2\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} + 0{,}5\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx^2 = \frac{\pi^2}{8} + \int\limits_0^{\pi/2} x\cos 2xdx = \\ = \frac{\pi^2}{8} + 0{,}5\int\limits_0^{\pi/2} xd\sin 2x = \frac{\pi^2}{8} + 0{,}5(x\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2}\sin 2xdx) = \\ = \frac{\pi^2}{8} + 0{,}25\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}.$$

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi^2}{16} = \dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$.▶

Ответ: $M(\xi) = \pi/4$, $D(\xi) = \dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$.

Пример 8.9. *Дана функция распределения непрерывной случайной величины $F(x)$. Найти параметр A, плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины и вероятность её попадания в интервал $(1,3)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ A(x^2 + x), & x \in (0;2], \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

◀ Функция распределения $F(x)$ определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$. При $x = 2$ предел справа функции распределения равен 1, следовательно и предел слева также обязан выть равен 1. Получаем уравнение

$$A(2^2 + 2) = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{6}(x^2 + x), & x \in (0;2], \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найдём теперь функцию плотности

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{6}(2x + 1), & x \in (0;2], \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Графики функции плотности и функции распределения представлены на рис. 32 и 33.

Найдём числовые характеристики случайной величины ξ.

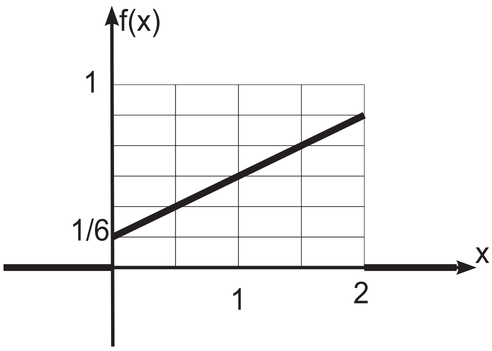

Рис. 32. *Функция плотности примера 8.9*

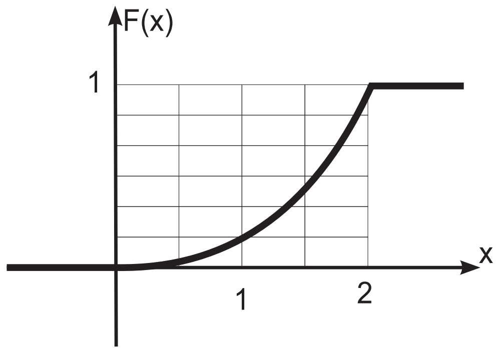

Рис. 33. *Функция распределения примера 8.9*

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{1}{6}(2x^2 + x)dx =$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{16}{3} + 2\right) = \frac{11}{9}.$$

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{1}{6}(2x^3 + x^2)dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 =$$
$$= \frac{1}{6}\left(8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{9}.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{16}{9} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 = \frac{144 - 121}{81} = \frac{23}{81} \approx 0{,}284.$$

$$P(1 < \xi < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$ ►

Задания для самостоятельной работы

8.1. Случайная величина ξ задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x) = 1/2 + \operatorname{arctg}(x)/\pi$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина ξ примет значение, заключенное в интервале $(0, \sqrt{3})$.

8.2. Плотность распределения непрерывной случайной величины ξ в интервале $(0, 2)$ задана как $f(x) = Ax^3$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Определить A, найти вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу $(0, 1)$ и её математическое ожидание.

8.3. Дана функция распределения непрерывной случайной величины ξ

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 1/2 - (1/2)\cos 3x \text{ при } 0 < x \leqslant \pi/3, \\ 1 \text{ при } x > \pi/3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

8.4. Функция распределения непрерывной случайной величины ξ задана выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ ax^3 \text{ при } 0 < x \leqslant 4, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Определить: коэффициент a, плотность распределения ξ, вероятность попадания ξ в интервал $(2, 3)$.

8.5. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0 \text{ или } x > \pi, \\ A\sin x, \text{ если } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Найти A, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.

8.6. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности $f(x) = (2/\pi) \cdot \cos^2 x$ при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $f(x) = 0$ вне указанного интервала. Найти среднее квадратическое отклонение величины ξ.

Домашнее задание.

Выполнить задание 1.10 типового расчёта.