Практическое занятие 4. Формулы полной вероятности и Байеса

Материал из лекции 2.

Теорема 4.8 (Формула полной вероятности). *Вероятность события A, которое может наступить только вместе с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2 \ldots H_n$, называемых гипотезами, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots \\ \ldots + P(H_n)P(A/H_n). \tag{4.1}$$

Кратко эту формулу можно записать в виде

$$\sum_{i=k}^{n} P(H_k)P(A/H_k).$$

Теорема 4.9 (Формула Бейеса). *В условиях формулы полной вероятности для $i = 1, \ldots, n$:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)}. \tag{4.2}$$

Метод решения задач на формулу полной вероятности сводится к следующему. В условиях теоремы 4.8 обозначается событие A, вероятность которого нужно найти в примере. Затем обозначаются гипотезы H_i, и вычисляются их вероятности $P(H_i)$. Наконец, определяются условные вероятности события A, и по формуле полной вероятности (4.1) находится искомая вероятность события A.

Пример 4.1. *На трёх шлифовальных станках было обработано* 120 *валов, причём первым, вторым и третьим станками было обработано соответственно* 50, 34 *и* 36 *валов. Вероятность того, что первый станок производит обработку отличного качества равна* 0,96, *второй –* 0,93, *третий –* 0,95. *Определить вероятность того, что случайно выбранный вал имеет обработку отличного качества.*

Решение. Пусть событие A состоит в том, что наудачу выбранный вал обработан отлично. Гипотезами здесь будут: H_1 – наудачу взятый вал обработан первым станком, H_2 – вторым, H_3 – третьим. Их вероятности равны:

$$P(H_1) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}, \quad P(H_2) = \frac{34}{120} = \frac{17}{60}, \quad P(H_3) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

Условные вероятности события A при этих гипотезах равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}96, \quad P(A/H_2) = 0{,}93, \quad P(A/H_3) = 0{,}95.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{5}{12} \cdot 0{,}96 + \frac{17}{60} \cdot 0{,}93 + \frac{3}{10} \cdot 0{,}95 = 0{,}9485 \approx 0{,}949.$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}949$.

Пример 4.2. *В первом ящике содержится 30 деталей, из которых 25 окрашенных, а во втором – 27, из которых 21 окрашена. При перевозке одна деталь из первого ящика выпала и её положили во второй ящик. Затем для работы из второго ящика извлекли деталь. Определить вероятность того, что она будет окрашена.*

Р е ш е н и е: Событие A – появление окрашенной детали; гипотезы: H_1 – переложена окрашенная деталь, H_2 – переложена неокрашенная деталь. Вероятности гипотез будут равны:

$$P(H_1) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}, \qquad P(H_2) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6},$$

а условные вероятности

$$P(A/H_1) = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}, \quad P(A/H_2) = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

Вероятность события A

$$P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{14} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{131}{168} \approx 0{,}780.$$

Ответ: $P(A) = 131/168 \approx 0{,}780$.

Пример 4.3. *В коробке находятся 20 новых резцов и 5 уже использованных. Из коробки наудачу берут три резца, которые после работы возвращают обратно. Назавтра из коробки снова берут три резца. Найти вероятность того, что эти три резца будут новыми.*

Р е ш е н и е: Здесь гипотезы H_i, где $i = 0, 1, 2, 3$, – в первый день работы берут i новых резцов; их вероятности определяются по формуле:

$$P(H_i) = C_{20}^{i} \cdot C_5^{3-i} / C_{25}^3.$$

Событие A - на второй день взято три новых резца. Условные вероятности этого события $P(A/H_i) = C_{20-i}^3 / C_{25}^3$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{1}{(C_{25}^3)^2} (C_5^3 \cdot C_{20}^3 + C_{20}^1 \cdot C_5^2 \cdot C_{19}^3 + C_{20}^2 \cdot C_5^1 \cdot C_{18}^3 + C_{20}^3 \cdot C_{17}^3) \approx 0{,}332.$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}332$.

Пример 4.4. *Работа двигателя контролируется двумя регуляторами. В течение определённого отрезка времени вероятность безотказной работы первого регулятора равна* 0,8, *второго* – 0,9. *При отказе обоих регуляторов двигатель выходит из строя. При отказе одного из регуляторов двигатель выходит из строя с вероятностью* 0,7. *Найти вероятность безотказной работы двигателя.*

Р е ш е н и е: Событие A – двигатель работает безотказно. Гипотезы: H_1 – оба регулятора не отказали, H_2 – один отказал, H_3 – оба отказали. Вероятности гипотез равны:

$P(H_1) = p_1 p_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$,

$P(H_2) = p_1 q_2 + p_2 q_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}26$,

$P(H_3) = q_1 q_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$;

здесь $p_1 = 0{,}8,\ p_2 = 0{,}9,\ q_1 = 1 - p_1 = 0{,}2,\ q_2 = 1 - p_2 = 0{,}1$.

Условные вероятности данных гипотез следующие:

$$P(A/H_1) = 1, \quad P(A/H_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3, \quad P(A/H_3) = 0.$$

Окончательно найдем:

$$P(A) = 0{,}72 \cdot 1 + 0{,}26 \cdot 0{,}3 + 0{,}02 \cdot 0 = 0{,}798.$$

Ответ: $P(A) = 0{,}798$.

Пусть теперь событие A произошло. Тогда если до опыта вероятности гипотез были $P(H_i)$, то после опыта условные вероятности гипотез будут определяться уже по формуле Байеса (4.2).

Пример 4.5. *Имеются три партии шатунов: в первой из них* 5 *расточенных резцом и* 7 *не расточенных; во второй* – 8 *расточенных и* 6 *не расточенных; в третьей* – 10 *расточенных. Наудачу выбирается одна из партий и из неё берется шатун. Этот шатун оказался расточенным. Найти вероятности того, что данный шатун взят из первой, второй и третьей партии.*

Р е ш е н и е:

Гипотезы $H_i (i = 1, 2, 3)$ – выбор i-той партии; их вероятности ввиду равнозначности выбора $P(H_i) = 1/3$. У нас событие A – взят расточенный шатун; условные вероятности этого события будут:

$$P(A/H_1) = 5/12, \quad P(A/H_2) = 4/7, \quad P(A/H_3) = 1.$$

Искомые вероятности найдутся по формуле Байеса

$$P(H_i/A) = \frac{1}{3}P(A/H_i)/\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} P(A/H_j) = P(A/H_i)/\sum_{j=1}^{3} P(A/H_j).$$

Тогда переоценка гипотез, сделанная после того, как событие A произошло, нам даст:

$P(H_1/A) = \dfrac{5/12}{5/12 + 4/7 + 1} = \dfrac{35}{167} \approx 0{,}210,$

$P(H_2/A) = \dfrac{48}{167} \approx 0{,}287, P(H_3/A) = \dfrac{84}{167} \approx 0{,}503.$

Заметим, что до опыта вероятности всех гипотез были одинаковы и равнялись 1/3.

Ответ: $P(H_1/A) = 35/167 \approx 0{,}210$; $P(H_2/A) = 48/167 \approx 0{,}287$; $P(H_3/A) = 84/167 \approx 0{,}503$.

Пример 4.6. *В трёх цехах завода производится соответственно $40\%, 35\%$ и 25% всей однотипной продукции; причём брак каждого цеха составляет $4\%, 3\%$ и 5% соответственно. а) Какова вероятность того, что изделие, выбранное случайно, будет бракованным? б) Пусть теперь случайно выбранное изделие оказалось бракованным. Найти вероятности того, что оно было сделано в первом, втором, третьем цехах.*

Р е ш е н и е: а) Событие A – выбранное изделие браковано. Гипотезы H_1, H_2, H_3 состоят в том, что изделие произведено соответственно в первом, втором, третьем цехах. Тогда

$$P(H_1) = 0{,}4, \quad P(H_2) = 0{,}35, \quad P(H_3) = 0{,}25,$$

а условные вероятности

$$P(A/H_1) = 0{,}04, \quad P(A/H_2) = 0{,}03, \quad P(A/H_3) = 0{,}05.$$

Полная вероятность

$$P(A) = \sum_{i=3}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = 0{,}4 \cdot 0{,}04 + 0{,}35 \cdot 0{,}03 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}039.$$

Вероятности того, что бракованное изделие сделано в первом, втором, третьем цехах, найдем по формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}04}{0{,}039} = \frac{16}{39} \approx 0{,}410,$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{7}{26} \approx 0{,}269,$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{25}{78} \approx 0{,}321.$$

Ответ: $P(A) = 0{,}039$; $P(H_1/A) = 16/39 \approx 0{,}410$; $P(H_2/A) = 7/26 \approx 0{,}269$; $P(H_3/A) = 25/78 \approx 0{,}321$.

Пример 4.7. *Станком обрабатываются детали, причём 95% данной продукции удовлетворяет принятым допускам. Первоначальный контроль признает пригодным детали, находящиеся в пределах допуска, с вероятностью 0,97, а те, которые не удовлетворяют допуску, с вероятностью 0,08. Найти вероятность того, что деталь, прошедшая контроль (признанная годной), действительно удовлетворяет допуску.*

Р е ш е н и е: Гипотеза H_1 – деталь находится в пределах допуска, а H_2 – не находится. По данным задачи $P(H_1) = 0{,}95$, $P(H_2) = 0{,}05$. Событие A – деталь при проверке находится в пределах допуска. Тогда

$$P(H_1/A) = 0{,}97, \qquad P(H_2/A) = 0{,}08.$$

Таким образом,

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}95\cdot 0{,}97}{0{,}95\cdot 0{,}97 + 0{,}05\cdot 0{,}08} \approx 0{,}996.$$

Ответ: $P(H_1/A) \approx 0{,}996$.

Самостоятельная работа

Пример 4.8. *В цехе имеется 5 станков одного типа и 4 станка второго типа. Вероятность того, что в течение рабочей смены станок первого типа не выйдет из строя, равна 0,92, а второго типа – 0,96. Проводится проверка работы наудачу выбранного станка. Найти вероятность того, что этот станок в течение всей рабочей смены будет работать.*

Пример 4.9. *В магазин поступили телевизоры с двух заводов. Продукция первого завода содержит 5% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 3%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если с первого завода поступило 60% всех телевизоров, имеющихся в магазине, а со второго – 40%?*

Пример 4.10. *Два цеха штампуют однотипные детали. Первый цех даёт 3% брака, второй – 5%. Для контроля отобраны 10 деталей* *из первого цеха и 12 – из второго. Эти детали смешаны в одну партию и из неё наудачу извлекают одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?*

Пример 4.11. *Партия изделий содержит 90% высококачественной продукции, 8% изделий низкого качества и 2% бракованных изделий. Если подвергнуть изделие испытанию, то все высококачественные изделия его выдерживают, из числа изделий низкого качества 60% проходят это испытание и 10% бракованных изделий также выдерживают испытание. Какова вероятность того, что наудачу выбранное изделие, прошедшее испытание, относится к числу высококачественных?*

Пример 4.12. *В первом трамвае из 36 пассажиров 2 не имеют билета; для второго и третьего трамваев эти цифры соответственно равны: 27 и 1, 48 и 3. Контролер выбирает наугад один из данных трамваев. Найти вероятности того, что: а) первый пассажир, которого проверяет контролер, не имеет билета; б) два проверенных пассажира имеют билеты.*

Пример 4.13. *В урну, содержащую 5 шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если все предположения о первоначальном составе шаров по цвету не отличаются друг от друга.*

Пример 4.14. *Два из трех студентов, сдавших экзамен, ответили на «отлично». Найти вероятность того, что ответили на «отлично» второй и третий студенты, если первый, второй и третий студенты знают соответственно 85%, 90% и 95% данного курса. Рекомендация: рассмотреть гипотезы H_1 – сдали на «отлично» первый и второй студенты, H_2 – первый и третий, H_3 – второй и третий.*

Пример 4.15. *Цех производит приборы, причём 9% продукции имеет какой-либо дефект. Вначале все приборы проверяются контролером, который обнаруживает дефект с вероятностью 0,96. Не забракованные контролером приборы поступают в отдел технического контроля завода, где дефект обнаруживается с вероятностью 0,98. Данный прибор оказался забракованным. Найти вероятности того, что он забракован: а) контролером, б) отделом технического контроля.*