3. Задачи на произведения вероятностей

3.1. Условная вероятность

Условная вероятность. Независимость событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Необходимый теоретический материал из лекции 2.

Теорема 3.2. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей :*

$$P(A+B) = P(A) + P(B), \text{ если } A \cdot B = \emptyset. \tag{3.1}$$

Теорема 3.3. *Вероятность противоположного к A события равна единице минус вероятность события A:*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{3.2}$$

Следствие 3.1. *Вероятность суммы n попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей:*

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n), \text{ если } A_iA_j = \emptyset \text{ при } i \neq j. \tag{3.3}$$

Теорема 3.4 (Теорема сложения вероятностей)**.** *Вероятность суммы двух событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их произведения:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{3.4}$$

Определение 3.1. *Условной вероятностью $P(A/B) = P_B(A)$ называют вероятность события A, вычисленную в предположении того, что событие B уже наступило.*

Теорема 3.5 (Теорема произведения вероятностей)**.** *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A). \tag{3.5}$$

Следствие 3.2. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятностей одного из них на условные вероятности всех остальных:*

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

Определение 3.2. *Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятность события B:*

$$P(B/A) = P(B). \tag{3.6}$$

Теорема 3.6. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей.*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{3.7}$$

Определение 3.3. *Несколько событий называют независимыми в совокупности, если каждое событие независимо со всеми остальными событиями и их возможными произведениями.*

Следствие 3.3. *Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей:*

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$$

Теорема 3.7. *Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности единицы и произведения вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:*

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n).$$

Следствие 3.4. *Если события $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ независимы в совокупности и имеют одинаковую вероятность появления p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий (событие A) равна:*

$$P(A) = 1 - (1-p)^n. \tag{3.8}$$

3.2. Выборка с повторениями

В задачах этого параграфа каждый вынутый предмет возвращается в совокупность и, следовательно, может быть вынут повторно. Подсчёт числа элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события, следует проводить, используя правило умножения (см. предыдущий параграф). Например, если из урны с пятью белыми и шестью красными шарами дважды вынимается шар с возвращением в урну, то общее число исходов будет $11^2 = 121$, а число исходов, при которых оба шара белые, составит $5^2 = 25$.

Другой подход состоит в представлении искомого события в виде *произведения независимых событий* или суммы несовместных событий.

Суммой $A + B$ событий A и B называется событие C, состоящее в том, что из событий A и B произошло хотя бы одно (или оба сразу).

События A и B называются *несовместными*, если в испытании не могут произойти одновременно.

В соответствии с теоремой произведения о сумме вероятностей, если события A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Произведением AB событий A и B называется событие C, состоящее в том, что события A и B произошли одновременно.

События A и B называются *независимыми*, если появление или непоявление одного из них не влияет на вероятность другого.

В соответствии с теоремой произведения вероятностей, если события A и B независимы, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Несколько событий называются независимыми в совокупности, если каждое из них независимо со всеми возможными комбинациями остальных.

Все события, рассматриваемые в этом пункте, будут независимыми в совокупности. Приведём основные формулы вероятностей различных их комбинаций.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению их вероятностей:

$$P(A_1A_2 \dots A_n = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$$

Вероятность появления хотя бы одного из событий, независимых в совокупности, равна разности единицы и произведения вероятностей противоположных им событий:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n).$$

Вероятность того, что из n событий, независимых в совокупности, произойдут в точности m, равна сумме всевозможных произведений n вероятностей, из которых m относятся к событиям A_i, а $n - m$ к событиям $\bar{A}_i$. Например, вероятность появления ровно двух событий из трёх, составит

$$P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3).$$

Пример 3.1. *В урне 13 белых и 8 чёрных шаров. Из урны вынимают шар, возвращают назад и берут снова. Найти вероятность того, что:*
(1) *оба раза был вынут белый шар;*
(2) *в первый и второй раз вынуты шары одного цвета;*
(3) *в первый и второй раз вынуты шары разного цвета;*
(4) *хотя бы один вынутый шар — белый.*

(1) Оба раза был вынут белый шар.

◀В условиях *выемки с возвращением* вероятность вынуть белый (чёрный) шар не зависит от того, которым он вынут по счёту, и равна $\frac{13}{21}$ для белого и $\frac{8}{21}$ для чёрного шара.
События $A_1 = \{$1-й белый$\}$ и $A_2 = \{$2-й белый$\}$ независимы, и вероятность их совместного появления равна произведению их вероятностей:
$P(A) = P(A_1)P(A_2) = \left(\frac{13}{21}\right)^2 = \frac{169}{441}$.▶

Ответ: $\frac{169}{441}$.

Замечание 3.1. *Аналогично решается задача о вероятности того, что оба раза вынут чёрный шар:* $P(\text{оба чёрные}) = \left(\frac{8}{21}\right)^2 = \frac{64}{441}$.

(2) В первый и второй раз вынуты шары одного цвета.

◀Искомое событие A является суммой несовместных событий
$A_1 = \{$оба белые$\}$ и $A_2 = \{$оба чёрные$\}$.

$P(A_1) = \frac{169}{441}$, $P(A_2) = \frac{64}{441}$ (см. п. 1 и замечание к нему);

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{169}{441} + \frac{64}{441} = \frac{233}{441}. \blacktriangleright$$

Ответ: $\frac{233}{441}$.

(3) В первый и второй раз вынуты шары разного цвета.

◀*Первый способ.* Искомое событие A — сумма двух несовместных событий:

$$A_1 = \{\text{1-й белый, 2-й чёрный}\} \text{ и } A_2 = \{\text{1-й чёрный, 2-й белый}\}.$$

$$P(A_1) = \frac{13}{21} \cdot \frac{8}{21} = \frac{104}{441}, \quad P(A_2) = \frac{8}{21} \cdot \frac{13}{21} = \frac{104}{441} = P(A_1);$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 2P(A_1) = \frac{2 \cdot 104}{441} = \frac{208}{441}.$$

Второй способ. Вероятность противоположного события

$P(\bar{A}) = P(\text{оба одного цвета}) = \dfrac{233}{441}$ (см. п. 3), тогда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{233}{441} = \frac{208}{441}. \blacktriangleright$$

Ответ: $\dfrac{208}{441}$.

(4) Хотя бы один вынутый шар — белый.

$\blacktriangleleft$Противоположное событие $\bar{A} = \{\text{оба чёрные}\}$ имеет вероятность $P(\bar{A}) = \dfrac{64}{441}$ (см. замечание к п. 1);

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{64}{441} = \frac{377}{441}.\blacktriangleright$$

Ответ: $\dfrac{377}{441}$.

Замечание 3.2. *Аналогично,*
$P(\text{хотя бы один чёрный}) =$
$= 1 - P(\text{оба белые}) = 1 - \dfrac{169}{441} = \dfrac{272}{441}.$

Пример 3.2. *В первой урне 5 белых и 9 чёрных шаров, во второй — 7 белых и 6 чёрных. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что:*

(1) *оба шара будут белыми;*
(2) *оба будут одного цвета;*
(3) *шары будут разного цвета;*
(4) *хотя бы один шар будет белым.*

(1) Оба шара будут белыми.

◀ События $A_1 = \{$шар из 1-й урны белый$\}$ и $A_2 = \{$из 2-й урны белый$\}$ независимы; искомое событие

$$A = A_1 \cdot A_2, \quad P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2).$$

$P(A_1) = \dfrac{5}{14}$, $P(A_2) = \dfrac{7}{13}$, откуда $P(A) = \dfrac{5}{14} \cdot \dfrac{7}{13} = \dfrac{5}{26}$.▶

Ответ: $\dfrac{5}{26}$.

Замечание 3.3. *Так же ищут вероятность двух чёрных шаров:*

$$P(\text{оба чёрные}) = P(\text{1-й чёрный}) \cdot P(\text{2-й чёрный}) = \frac{9}{14} \cdot \frac{6}{13} = \frac{27}{91}.$$

(2) Оба будут одного цвета.

◀Искомое событие A является суммой двух несовместных событий $A_1 = \{$оба белые$\}$ и $A_2 = \{$оба чёрные$\}$. $P(A_1) = \dfrac{5}{26}$, $P(A_2) = \dfrac{27}{91}$ найдены в п. 1 и замечании к нему. Имеем:

$$P(A) = \frac{5}{26} + \frac{27}{91} = \frac{89}{182}.▶$$

Ответ: $\dfrac{89}{182}$.

(3) Шары будут разного цвета.

◀Искомое событие A есть сумма двух несовместных событий:

$$A_1 = \{\text{1-й белый, 2-й чёрный}\} \text{ и } A_2 = \{\text{1-й чёрный, 2-й белый}\}.$$

В свою очередь, событие A_1 есть произведение независимых событий $B_1 = \{$1-й белый$\}$ и $B_2 = \{$2-й чёрный$\}$;
$P(B_1) = \dfrac{5}{14}$, $P(B_2) = \dfrac{6}{13}$;

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(B_2) = \frac{5}{14} \cdot \frac{6}{13} = \frac{30}{182}.$$

Аналогично, $A_2 = C_1 \cdot C_2$, где

$$C_1 = \{\text{1-й чёрный}\},\ C_2 = \{\text{2-й белый}\} \text{ — независимые события.}$$

$$P(C_1) = \frac{9}{14},\ P(C_2) = \frac{7}{13},\ P(A_2) = P(C_1) \cdot P(C_2) = \frac{9}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{63}{182}.$$

В итоге

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{30}{182} + \frac{63}{182} = \frac{93}{182}.\blacktriangleright$$

Ответ: $\frac{93}{182}$.

(4) Хотя бы один шар будет белым.

◀Событие A противоположно к событию $\bar{A}$={оба чёрные}.
$P(\bar{A}) = \frac{27}{91}$ (см. замечание к п. 1); $P(A) = 1 - \frac{27}{91} = \frac{64}{91}$.▶

Ответ: $\frac{64}{91}$.

Замечание 3.4.

$$P(\textit{хотя бы один чёрный}) = 1 - P(\textit{оба белые}) = 1 - \frac{5}{26} = \frac{21}{26}.$$

Пример 3.3. *В урне 13 белых и 8 чёрных шаров. Из урны по очереди вынимают три шара, каждый раз возвращая вынутый шар в урну. Найти вероятность того, что:*

(1) *все время попадались белые шары;*
(2) *один раз вынут белый шар и два раза — чёрный;*
(3) *все вынутые шары были одного цвета;*
(4) *вынимались как белые, так и чёрные шары.*

(1) Все время попадались белые шары.

◀Вероятность искомого события равна $\left(\dfrac{13}{21}\right)^3 = \dfrac{2197}{9261}$.▶

Ответ: $\dfrac{2197}{9261}$.

Замечание 3.5. *Вероятность того, что все время вынимались чёрные шары, вычисляется аналогично и равна* $\left(\dfrac{8}{21}\right)^3 = \dfrac{512}{9261}$.

(2) Один раз вынут белый шар и два раза — чёрный.

◀Искомое событие A есть сумма трёх несовместных равновероятных событий A_1, A_2 и A_3:

$A_1 = \{$1-й белый, 2-й чёрный, 3-й чёрный$\}$,
$A_2 = \{$1-й чёрный, 2-й белый, 3-й чёрный$\}$,
$A_3 = \{$1-й чёрный, 2-й чёрный, 3-й белый$\}$.

Очевидно, $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$, поэтому

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 3P(A_1).$$

Событие A_1 есть произведение трёх независимых событий

$$B_1 = \{\text{1-й белый}\}, \quad B_2 = \{\text{2-й чёрный}\}, \quad B_3 = \{\text{3-й чёрный}\};$$

$$P(B_1) = \frac{13}{21}, \quad P(B_2) = P(B_3) = \frac{8}{21};$$

$$P(A_1) = P(B_1)P(B_2)P(B_3) = \frac{13}{21} \cdot \left(\frac{8}{21}\right)^2 = \frac{832}{9261};$$

$$P(A) = 3P(A_1) = \frac{3 \cdot 832}{9261} = \frac{832}{3087}. \ ▶$$

Ответ: $\dfrac{832}{3087}$.

Замечание 3.6. *Рассуждая аналогично, можно вычислить*

$$P(\textit{два белых, один чёрный}) = 3 \cdot \left(\frac{13}{21}\right)^2 \cdot \frac{8}{21} = \frac{1352}{3087}.$$

(3) Все вынутые шары были одного цвета.

◀Искомое событие $A = \{\text{все три одного цвета}\}$ есть сумма двух несовместных событий:

$$A_1 = \{\text{три белых}\} \quad \text{и} \quad A_2 = \{\text{три чёрных}\}.$$

Согласно п. 1 и замечанию к нему, $P(A_1) = \dfrac{2197}{9261}$, $P(A_2) = \dfrac{512}{9261}$, откуда

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{2197}{9261} + \frac{512}{9261} = \frac{2709}{9261} = \frac{43}{147}.▶$$

Ответ: $\dfrac{43}{147}$.

(4) Вынимались как белые, так и чёрные шары.

◀*Первый способ.* Искомое событие

$$A = \{\text{были как белые, так и чёрные}\}$$

есть сумма двух несовместных событий:

$$A_1 = \{\text{1 белый, 2 чёрных}\} \quad \text{и} \quad A_2 = \{\text{2 белых, 1 чёрный}\},$$

чьи вероятности найдены в п. 2 и замечании к нему:

$$P(A_1) = \frac{832}{3087}, \quad P(A_2) = \frac{1352}{3087}.$$

Имеем:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{832}{3087} + \frac{1352}{3087} = \frac{2184}{3087} = \frac{104}{147}.$$

Второй способ. Противоположным к A является событие $\bar{A} = \langle\text{все шары одного цвета}\rangle$; $P(\bar{A}) = \dfrac{43}{147}$ (см. п. 3). Тогда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{43}{147} = \frac{104}{147}.▶$$

Ответ: $\dfrac{104}{147}$.

Пример 3.4. *Всхожесть семян моркови, гороха и свёклы составляет $p_1 = 80\%$, $p_2 = 60\%$ и $p_3 = 70\%$ соответственно. В лаборатории посадили по одному семени каждого овоща. Найти вероятность того, что:*

(1) *взойдут все три ростка;*
(2) *не взойдёт ни один росток;*
(3) *взойдёт хотя бы один росток;*
(4) *взойдёт ровно один росток;*
(5) *взойдёт не более одного ростка;*
(6) *взойдут ровно два ростка;*
(7) *взойдёт не менее двух ростков;*
(8) *взойдёт не более двух ростков.*

Пусть A_1, A_2 и A_3 — события, состоящие в прорастании моркови, гороха и свёклы; $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}6$; $P(A_3) = 0{,}7$; $P(\bar{A}_1) = 0{,}2$; $P(\bar{A}_2) = 0{,}4$; $P(\bar{A}_3) = 0{,}3$. Пусть F_i — искомое событие в пункте i.

(1) Взойдут все три ростка.
$\blacktriangleleft P(F_1) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}336.\blacktriangleright$
Ответ: 0,336.

(2) Не взойдёт ни один росток.
$\blacktriangleleft P(F_2) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}024.\blacktriangleright$
Ответ: 0,024.

(3) Взойдёт хотя бы один росток.
$\blacktriangleleft P(\bar{F}_3) = P(F_2) = 0{,}024$; $P(F_3) = 1 - 0{,}024 = 0{,}976.\blacktriangleright$
Ответ: 0,976.

(4) Взойдёт ровно один росток.
◀Используя теоремы сложения и умножения вероятностей, получаем:

$$P(F_4) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3) =$$

$$= P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) =$$

$$= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) =$$

$= 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}096 + 0{,}036 + 0{,}056 = 0{,}188.\blacktriangleright$
Ответ: 0,188.

(5) Взойдёт не более одного ростка.
▶В соответствии с принятыми обозначениями:
$F_5 = F_2 + F_4$; $P(F_5) = P(F_2) + P(F_4) = 0{,}024 + 0{,}188 = 0{,}212.\blacktriangleright$
Ответ: 0,212.

(6) Взойдут ровно два ростка.
$\blacktriangleleft P(F_6) = P(A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3) =$

$$= P(A_1A_2\bar{A}_3) + P(A_1\bar{A}_2A_3) + P(\bar{A}_1A_2A_3) =$$

$$= 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 =$$

$$= 0{,}144 + 0{,}224 + 0{,}084 = 0{,}452. \blacktriangleright$$

Ответ: 0,452.

(7) Взойдёт не менее двух ростков.
$\blacktriangleleft P(F_7) = P(F_6 + F_1) = P(F_7) + P(F_1) = 0{,}336 + 0{,}452 = 0{,}788. \blacktriangleright$
Ответ: 0,788.

(8) Взойдёт не более двух ростков.
$\blacktriangleleft P(F_8) = P(\bar{F}_1) = 1 - P(F_1) = 1 - 0{,}336 = 0{,}664. \blacktriangleright$
Ответ: 0,664.

ПРИМЕР 3.5. *В электрической цепи (рис. 8) выключатели A и B независимо замкнуты с вероятностями $p_1 = 0{,}2$ и $p_2 = 0{,}6$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника R лампочка L загорится?*

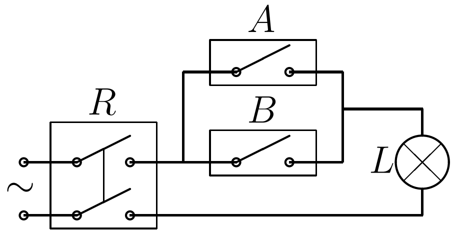

Рис. 8. Параллельное соединение двух элементов

◀При параллельной коммутации выключателей лампочка L загорается, если замкнут хотя бы один выключатель, и НЕ загорается, если все они одновременно разомкнуты. Последнее (лампочка НЕ загорится) можно трактовать как произведение независимых событий $G = G_1 \cdot G_2$, где

$$G_1 = \{\text{выкл. } A \text{ разомкнут}\} \text{ и } G_2 = \{\text{выкл. } B \text{ разомкнут}\};$$

$$P(G) = P(G_1)P(G_2).$$

Поэтому будем пользоваться значениями вероятностей того, что выключатели разомкнуты, и вычислять вероятность $P(G)$. Если дана вероятность p того, что выключатель замкнут, найдем нужную вероятность $P(G_i) = 1 - p$. Пусть F — искомое событие. Если требуется найти вероятность того, что лампочка не загорится, то $F = G$ и $P(F) = P(G)$, а если нужна вероятность того, что лампочка загорится, то $F = \bar{G}$ и $P(F) = 1 - P(G)$.

◀В условии даны вероятности того, что выключатели разомкнуты, поэтому

$$P(G_1) = 0{,}2 \text{ и } P(G_2) = 0{,}6; \quad P(G) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12.$$

Так как $F = \bar{G}$, то $P(F) = 1 - P(G) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$.▶

Ответ: 0,88.

Пример 3.6. *Радист, для надёжности, трижды передаёт один и тот же сигнал. Вероятность того, что первый сигнал будет принят равна 0,2, второй – 0,4 и третий – 0,6. Предполагается, что данные события независимы. Найти вероятность того, что сигнал будет принят.*

◀ Пусть A – искомое событие. A_i, $i = 1, 2, 3$ — событие означающее, что i-тыл сигнал был принят. Тогда
$A = A_1A_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

Если подставить значения вероятностей $P(A_1) = 0{,}2$, $P(\overline{A}_1) = 0{,}8$, $P(A_2) = 0{,}4$, $P(\overline{A}_2) = 0{,}6$, $P(A_3) = 0{,}6$, $P(\overline{A}_3) = 0{,}4$, получим ответ.

Однако, не трудно заметить,что данный метод правильный, но не оптимальный.

Очевидно, что $\Omega = A + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

Поэтому,
$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}808$. ▶

Пример 3.7. *Для поражения цели достаточно одного попадания. Произведено три выстрела с вероятностью попадания:* $0{,}7; 0{,}75$ *и* $0{,}8$. *Найти вероятность поражения цели.*

◀Пусть A искомое событие состоящее в том, том цель будет поражена. Найдём вероятность противоположного события $\overline{A}$. Цель не будет поражена, если все три выстрела не попадут.
$P(\overline{A}) = 0{,}3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}015 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}985$.▶

Ответ: 0,985.

Пример 3.8. *Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого 0,6 второго 0,7. Найти вероятность того, что будет три попадания, если каждый стрелок производит по два выстрела.*

◀Пусть A – искомое событие. Пусть $A_1,\ A_2$ — события означающие, что первый стрелок попал в мишень при i-том выстреле. Аналогично, $B_1,\ B_2$ — для второго стрелка.

При этом $P(A_1) = P(A_2) = 0{,}6,\ P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = 0,4,$
$P(B_1) = P(B_2) = 0{,}7,\ P(\bar{B}_1) = P(\bar{B}_2) = 0,3.$

Тогда искомое событие можно представить в виде
$A = \bar{A}_1 A_2 B_1 B_2 + A_1 \bar{A}_2 B_1 B_2 + A_1 A_2 \bar{B}_1 B_2 + A_1 A_2 B_1 \bar{B}_2.$
$P(A) = 0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7 + 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7 + 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7 + 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3 =$
$= 0{,}3864.$ ▶

Ответ: 0,3864.

Пример 3.9. *В электрической цепи (рис. 9) выключатели A, B и C независимо замкнуты с вероятностями $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}6$ и $p_3 = 0{,}3$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится?*

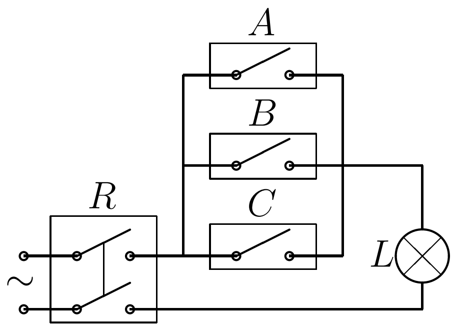

Рис. 9. Параллельное соединение трёх элементов

◀Событие

$$G = \{\text{лампочка НЕ загорится}\}$$

есть произведение трёх независимых событий:

$$G_1 = \{A \text{ разомкнут}\},\ G_2{=}\{B \text{ разомкнут}\},\ G_3{=}\{C \text{ разомкнут}\};$$

$$P(G) = P(G_1)P(G_2)P(G_3).$$

Если p_1, p_2 и p_3 — вероятности разомкнутых выключателей, то $P(G_i) = p_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$, а если замкнутых, то $P(G_i) = 1 - p_i$. Если искомое событие $F = \{\text{лампочка НЕ загорится}\}$, то $P(F) = P(G)$, а если $F = \{\text{лампочка загорится}\}$, то $P(F) = 1 - P(G)$.

$P(G_1) = 0{,}2$; $P(G_2) = 0{,}6$; $P(G_3) = 0{,}3$;

$P(G) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}036$; $P(F) = 1 - P(G) = 1 - 0{,}036 = 0{,}964$.▶

Ответ: 0,964.

Пример 3.10. *В электрической цепи рис. 10) выключатели A, B и C независимо замкнуты с вероятностями $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}6$ и $p_3 = 0{,}3$. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится?*

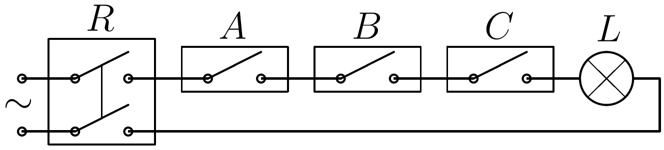

Рис. 10. Последовательное соединение трёх элементов

◀Событие $G = \{L \text{ загорится}\}$ есть произведение *трёх* независимых в совокупности событий:

$$G_1 = \{A \text{ замкнут}\},\ G_2 = \{B \text{ замкнут}\} \text{ и } G_3 = \{C \text{ замкнут}\};$$

$P(G) = P(G_1)P(G_2)P(G_3)$. При заданных вероятностях p_1, p_2, p_3 положим $P(G_i) = p_i$ если это вероятности разомкнутых выключателей, и $P(G_i) = 1-p_i$ для вероятностей замкнутых выключателей. Если $F = \{\text{лампочка загорится}\}$, то $P(F) = P(G)$, иначе $P(F) = 1 - P(G)$.

$P(G_1) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$; $P(G_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$;
$P(G_3) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$; $P(F) = P(G) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}224$.▶

Ответ: 0,224.

Пример 3.11. *В электрической цепи (рис. 11) выключатели A, B и C независимо замкнуты с вероятностями $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}6$ и $p_3 = 0{,}3$. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится?*

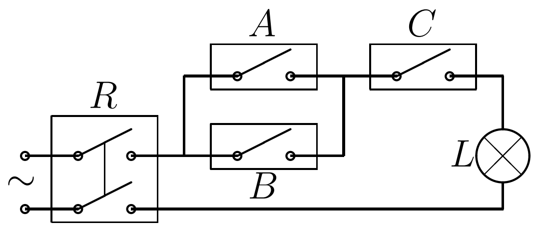

Рис. 11. Параллельное и последовательное соединение элементов

◀Выключатель C закоммутирован последовательно с контуром AB. Следовательно, искомое событие

$$F = \{\text{лампочка загорится}\}$$

есть произведение событий

$$G_1 = \{\text{контур } AB \text{ замкнут}\} \text{ и } G_2 = \{\text{выкл. } C \text{ замкнут}\};$$

$P(F) = P(G_1)P(G_2)$. Вычисление вероятности $P(G_1)$ сводится к задаче о загорании лампочки при параллельной коммутации всего двух выключателей A и B, которая была решена в п. 1 примера 3.5; $P(G_1) = 0{,}88$. Далее, $P(G_2) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$;

$P(F) = 0{,}88 \cdot 0{,}7 = 0{,}616$.▶

Ответ: 0,616.

Пример 3.12. *В электрической цепи (рис. 12) выключатели A, B и C независимо замкнуты с вероятностями $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}6$ и $p_3 = 0{,}3$. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится?*

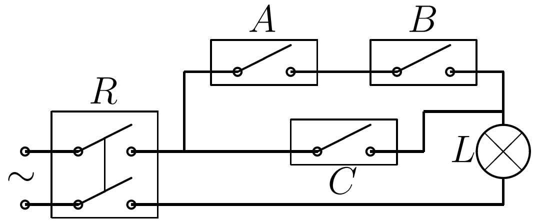

Рис. 12. К примеру 2.12

◀Цепь AB и выключатель C параллельны, поэтому (см. примеры 3.5 и 3.9) удобнее вычислять вероятность события

$$G = \{\text{лампочка НЕ загорится}\} =$$

$$= \{\text{цепь } AB \text{ разомкнута } (G_1)\} \cdot \{\text{выкл. } C \text{ разомкнут } (G_2)\}.$$

Вычисление $P(G_1)$ сводится к задаче о НЕ-загорании лампочки при последовательной коммутации выключателей A и B при заданных вероятностях того, что они разомкнуты:

$$P(G_1) = 0{,}68; \quad P(G_2) = 0{,}3; \quad P(G) = 0{,}32 \cdot 0{,}3 = 0{,}204.$$

Искомое событие $F = \{\text{лампочка загорится}\}$ противоположно к G;

$$P(F) = 1 - P(G) = 1 - 0{,}204 = 0{,}796.$$▶

Ответ: 0,796.

Пример 3.13. *Релейная схема состоит из 8-ми элементов трёх типов A_1, A_2 и A_3, рис. 13,а). Вероятность того, что за время T элементы не выйдут из строя известна и равна: $P(A_1) = 0{,}6$, $P(A_2) = 0{,}7$, $P(A_3) = 0{,}8$. Найти вероятность безотказной работы схемы.*

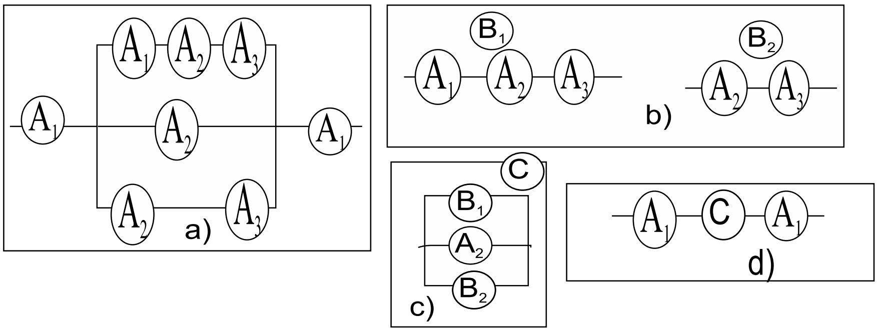

Рис. 13. *К примеру 3.14*

◀Событие состоящее в том, что схема работает безотказно в течении времени T, обозначим A. Вероятность такого события A называется надёжностью схемы. Обозначим надёжности элементов
$P(A_1) = p_1 = 0{,}6, \quad P(A_2) = p_2 = 0{,}7, P(A_3) = p_3 = 0{,}8.$

Тогда вероятности отказа элементов $q_i = 1 - p_i$ будут равны
$P(\overline{A_1}) = q_1 = 0{,}4, P(\overline{A_2}) = q_2 = 0{,}3, P(\overline{A_3}) = q_3 = 0{,}2.$

Выделим из исследуемой схемы два последовательно соединённых блока B_1 и B_2 рис. 13,b), находящиеся в блоке из трёх параллельных ветвей. Найдём их надёжность. Эти блоки состоят из последовательных элементов, поэтому их надёжность равна произведению надёжности элементов.
$P(B_1) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0,336,$
$P(B_2) = P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0,56.$

Найдём надёжность блока C, состоящего из трёх параллельных элементов.

При параллельном соединении элементов схема работоспособна, когда работает хотя бы один элемент. Для определения надёжности параллельного блока находим сначала вероятность противоположного события — вероятность того, что блок вышел из строя. Т.е. что все элементы неработоспособны, а затем применяем формулу для противоположного события.
$P(C) = 1 - P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{B_2}) =$
$= 1 - 0{,}664 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}44 = 1 - 0{,}087648 = 0{,}912352.$

Наконец, заменяем в схеме рассчитанный параллельный блок, элементом C, получаем схему из трёх последовательных блоков, рис. 13,d). Используя теорему о произведении вероятностей для несовместных событий, получаем
$P(A) = P(A_1) \cdot P(C) \cdot P(A_1) = 0{,}6^2 \cdot 0{,}912352 = 0{,}32844672.$▶

Ответ: $0{,}32844672 \approx 0{,}328$.

Пример 3.14. *Ведется стрельба снарядами по кораблю перевозящим семь разнотипных контейнеров с горючим расположенных один за другим. Для того, чтобы поразить корабль, достаточно попасть либо в один из семи контейнеров с горючим двумя или тремя снарядами, либо попасть в два соседних контейнера. Найти вероятность того, что корабль будет поражен, если в область контейнеров попало 3 снаряда (попадания в любой контейнер считаем равновероятными).*

◀ Пусть A_i – событие состоящее в том, что попали в i-тый контейнер. Применяем формулу классического определения вероятности.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Найдём число исходов в которых цель будет поражена. С учётом принятых обозначений, искомое событие A можно записать как сумму слагаемых каждое из которых является произведением трёх равновероятных независимых событий.

$A = A_1A_1A_1 + A_2A_2A_2 + \ldots + A_7A_7A_7 +$
$+ A_1A_1A_2 + \ldots + A_1A_1A_7 + A_2A_2A_3 + \ldots + A_2A_2A_7 + \ldots + A_7A_7A_6 +$
$+ A_1A_2A_3 + \ldots + A_1A_2A_7 + A_2A_3A_4 + \ldots + A_2A_3A_7 + \ldots + A_5A_6A_7.$

При этом первая строка содержит семь слагаемых означающих события в которых все три снаряда попали в один из семи контейнеров $m_1 = 7$.

Во второй строке расположены $m_2 = 7 \cdot 6 \cdot 3 = 126$ слагаемых означающие, что два снаряда попали в i-тый контейнер, а третий снаряд попал в другой контейнер.

В третьей строке расположены $m_3 = 25 \cdot 3! = 150$ слагаемых которые соответствуют попаданию снарядов в два соседних контейнера.

Таким образом, всего $m = m_1 + m_2 + m_3 = 7 + 126 + 150 = 283$ исхода благоприятствующих появлению события A, а число всевозможных исходов данного испытания равно числу размещений с повторениями $n = 7^3 = 343$.

Следовательно, вероятность искомого события равна

$P(A) = \dfrac{283}{343} \approx 0{,}825.$▶

Для контроля правильности полученного решения, найдём вероятность противоположного события. Цель не будет поражена, если все три снаряда не попадут в соседние контейнеры и не попадут в один контейнер. Событие $\overline{A}$ можно представить в виде десяти слагаемых

$\overline{A} = A_1A_3A_5 + A_1A_3A_6 + A_1A_3A_7 + A_1A_4A_6 + A_1A_4A_7 + A_1A_5A_7 +$
$+ A_2A_4A_6 + A_2A_4A_7 + A_2A_5A_7 + A_3A_5A_7.$

С учётом перестановок, получаем $\overline{m} = 10 \cdot 3! = 60.$

$P(\overline{A}) = \dfrac{60}{343} \approx 0{,}175$

$P(A) + P(\overline{A}) = \dfrac{283}{343} + \dfrac{60}{343} = 1.$

Ответ: $P(A) = \dfrac{283}{343} \approx 0{,}825.$

Задания для самостоятельной работы

3.1. В урне 15 белых и 9 чёрных шаров. Из урны вынимают шар, возвращают назад и берут снова. Найти вероятность того, что оба раза был вынут белый шар.

3.2. В урне 15 белых и 9 чёрных шаров. Из урны вынимают шар, возвращают назад и берут снова. Найти вероятность того, что в первый и второй раз вынуты шары одного цвета.

3.3. В урне 15 белых и 9 чёрных шаров. Из урны вынимают шар, возвращают назад и берут снова. Найти вероятность того, что в первый и второй раз вынуты шары разного цвета.

3.4. В урне 11 белых и 7 чёрных шаров. Из урны вынимают шар, возвращают назад и берут снова. Найти вероятность того, что хотя бы один вынутый шар — чёрный.

3.5. В первой урне 11 белых и 8 чёрных шаров, во второй — 7 белых и 12 чёрных. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

3.6. В первой урне 6 белых и 10 чёрных шаров, во второй — 11 белых и 9 чёрных. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут одного цвета.

3.7. В первой урне 11 белых и 8 чёрных шаров, во второй — 7 белых и 12 чёрных. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут разного цвета.

3.8. В первой урне 6 белых и 10 чёрных шаров, во второй — 11 белых и 9 чёрных. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что хотя бы один из них будет белым.

3.9. В урне 11 белых и 8 чёрных шаров. Из урны по очереди вынимают три шара, каждый раз возвращая вынутый шар в урну. Найти вероятность того, что всё время вынимались белые шары.

3.10. В урне 6 белых и 9 чёрных шаров. Из урны по очереди вынимают три шара, каждый раз возвращая вынутый шар в урну. Найти вероятность того, что однажды вынут белый шар и дважды — чёрный.

3.11. В урне 6 белых и 9 чёрных шаров. Из урны по очереди вынимают три шара, каждый раз возвращая вынутый шар в урну. Найти вероятность того, что все вынутые шары были одного цвета.

3.12. В урне 11 белых и 8 чёрных шаров. Из урны по очереди вынимают три шара, каждый раз возвращая вынутый шар в урну. Найти вероятность того, что вынимались как белые, так и чёрные шары.

3.13. В электрической цепи (рис. 9) выключатели A, B и C независимо разомкнуты с вероятностями 0,4, 0,5 и 0,4 соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится)?

3.14. В электрической цепи (рис. 9) выключатели A, B и C независимо замкнуты с вероятностями 0,7, 0,2 и 0,3 соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится?

3.15. В электрической цепи (рис. 9) выключатели A, B и C независимо разомкнуты с вероятностями 0,4, 0,5 и 0,4 соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L НЕ загорится)?

3.16. В электрической цепи (рис. 10) выключатели A, B и C независимо замкнуты с вероятностями 0,4, 0,4 и 0,3. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится?

3.17. В электрической цепи (рис. 10) выключатели A, B и C независимо разомкнуты с вероятностями 0,6, 0,3 и 0,8. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L НЕ загорится?

3.18. Релейная схема, рис.14 , состоит из семи элементов: $V_1, V_2, \ldots, V_7$. Событие A_i состоит в том, что элемент V_i работает безотказно в течение времени T. Найти вероятность того, что за время T а) схема будет работает безотказно; б) схема выйдет из строя.

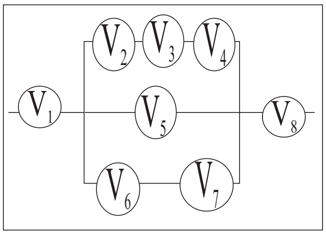

Рис. 14. *К примеру 3.18*

3.19. Через данную остановку с одинаковым интервалом проходят 39 автобусов, из них 14 автобусов маршрута N_1, 12 автобусов маршрута N_2 и 13 автобусов маршрута N_3. Какова вероятность того, что первый подходящий автобус будет иметь маршрут N_1 или N_3?

3.20. При каждом включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,95. Найти вероятность того, что двигатель начнёт работать при втором включении зажигания.

3.21. В лабораторию поступило два прибора, изготовленных на одном заводе, и три прибора, изготовленных на другом заводе. Вероятность того, что прибор, поступивший с первого завода, имеет высшее качество, равна 0,75, а со второго – 0,6. Найти вероятности того, что: а) все приборы имеют высшее качество, б) по крайней мере один из них имеет высшее качество, в) ни один из них не имеет высшее качество.

3.22. Отдел технического контроля проверяет две партии изделий на стандартность. Вероятность того, что изделие из первой партии стандартно, равна 0,92, а из второй – 0,96. Из каждой партии берутся по одному изделию. Найти вероятность того, что только одно из них будет стандартно.

3.23. Из полной колоды 52 карт наудачу вынимаются одна за другой три карты без возвращения. Какова вероятность того, что в первый раз будет извлечена тройка, во второй – семерка, в третий – туз.

3.24. Из группы студентов в 12 человек каждый раз наудачу назначают дежурных по четыре человека. Найти вероятность того, что после трёх дежурств каждый студент отдежурил по одному разу.

3.25. Из 20 автомобилей, отправленных на ремонт, 6 требуют ремонта коробки передач. Найти вероятность того, что из трёх выбранных случайно автомобилей по крайней мере один требует ремонта коробки передач.

3.26. Вероятность изготовления подшипникового шарика ниже третьего класса равна 0,0002. а) Определить вероятность того, что в партии из 400 шариков содержится хотя бы один ниже третьего класса. б) Какой должен быть объём партии, чтобы вероятность наличия в ней хотя бы одного бракованного шарика была не более $p_1 = 0{,}03$?

3.27. В коробке лежат 20 галстуков, причём 12 из них красные, остальные белые. Определить вероятность того, что из трёх вынутых наудачу галстуков все они окажутся одного цвета.

3.28. Из двух наборов шахмат наудачу извлекают по одной фигуре или пешке. Какова вероятность того, что обе фигуры окажутся ладьями?

3.29. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наудачу. а) Определить вероятность того, что ему придется звонить не более, чем в три места. б) Как изменится вероятность, если известно, что последняя цифра нечётная?

3.30. В урне m белых и n чёрных шаров. Из урны вынимаются одновременно два шара. Определить вероятность того, что оба шара будут: а) белыми, б) разных цветов.

3.31. В партии, состоящей из 30 деталей, имеются 5 бракованных. Из партии выбирается для проверки 10 деталей. Если среди контрольных окажется более двух бракованных, партия не принимается. Найти вероятность того, что данная партия не будет принята.

3.32. В урне 10 белых и 5 чёрных шаров. Из урны в случайном порядке, один за другим, вынимают находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что третьим по порядку будет вынут чёрный шар.

3.33. Какова вероятность того, что в группе из 30 случайно отобранных студентов хотя бы у двоих окажется один и тот же день рождения? Найдите ту же вероятность в группе из 50 студентов.

3.34. В лотерее 10000 билетов, из которых 1000 выигрышных. Участник лотереи покупает 10 билетов. Определить вероятность того, что он выиграет хотя бы на один билет.

Домашнее задание.

Выполнить задание 1.3 и 1.4 типового расчёта.