14. Введение в математическую статистику

Необходимый теоретический материал из лекции 7.

Значительная часть математической статистики связана с необходимостью описать большую совокупность объектов. Её называют ***генеральной совокупностью***. Если *генеральная совокупность* слишком многочисленна, или её объекты труднодоступны, или имеются другие причины, не позволяющие изучить все объекты, прибегают к изучению какой-то части объектов. Эта выбранная для полного изучения часть называется ***выборкой***. Необходимо, чтобы выборка наилучшим образом представляла генеральную совокупность, т.е. была ***репрезентативной*** (представительной). Если генеральная совокупность мала или совсем неизвестна, не удаётся предложить ничего лучшего, чем чисто случайный выбор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.1. *Количество наблюдений n называется* ***объёмом выборки***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.2. *Наблюдаемые значения x_i называют вариантами, а их последовательность, записанную в возрастающем порядке —* ***вариационным рядом***. *Числа наблюдений $m_1, m_2, \ldots, m_k$ называют частотами.*

Разность $max(x_i) - min(x_i)$ называется ***размахом вариационного ряда***.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот — табл. 14.1.

Таблица 14.1

Статистическое распределение			
варианты x_i	x_1	$\ldots$	x_k
частоты m_i	m_1	$\ldots$	m_k

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.3. ***Эмпирической*** *(статистической)* ***функцией распределения*** *случайной величины ξ называется функция $F^*(x)$, которая при каждом x равна относительной частоте события $\xi < x$, т.е. отношению m_x — числа наблюдений меньших x к объёму выборки n:*

$$F^*(x) = P^*(\xi < x) = \frac{m_x}{n} \ .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.4. ***Медиана*** *— значение варианты, для которого количество элементов находящихся слева и справа, одинаково.*

Т.е., значение M_e, при котором $F^*(M_e) = 0{,}5$.

Для простой статистической совокупности мода вычисляется следующим образом. Исследуемая выборка $\{x_i\}$ сортируется в порядке не убывания значений элементов. Далее, если объём выборки нечётное число, то $M_e = x_{(n+1)/2}$, иначе $M_e = \big(x_{n/2} + x_{n/2+1}\big)/2$.

Например, для вариационного ряда $\{1, 2, 5, 6, 8, 9, 15\}$ медиана равна четвёртому элементу $M_e = 6$, а для вариационного ряда $\{1, 2, 5, 6, 7, 9, 15, 16\}$ медиана равна полусумме четвёртого и пятого элементов $M_e = (6 + 7)/2 = 6{,}5$.

Определение 14.5. ***Модой*** M_0 *называется варианта, которая имеет наибольшую частоту по сравнению с другими частотами.*

В дискретно-вариационном ряду мода — это та варианта, которой соответствует наибольшая частота.

Для простой статистической совокупности мода вычисляется простым подсчётом. Например, для вариационного ряда $\{1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7\}$, $M_O = 4$, т.к. значение 4 встречается чаще других.

Статистические распределения, которые имеют несколько наиболее часто встречающихся значений, называются мультимодальными или полимодальными.

Например, для вариационного ряда: $\{1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8\}$, модами будут три значения $M_O = \{3, 6, 8\}$.

Простейшей характеристикой распределения является ***выборочное среднее***, которое для простой статистической совокупности вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{14.1}$$

Если данные сгруппированы, то:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot x_i. \tag{14.2}$$

Для характеристики разброса значений случайной величины относительно её среднего значения используется ***выборочная дисперсия***

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} \tag{14.3}$$

для простой совокупности и

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - \bar{x})^2 \tag{14.4}$$

для сгруппированного распределения.

$$S = \sqrt{S^2} \tag{14.5}$$

называется ***выборочным средним квадратическим отклонением*** (СКО).

На практике вместо формулы (14.3) бывает удобнее применять другую:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 \tag{14.6}$$

для простой совокупности и

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^2 - (\bar{x})^2 \tag{14.7}$$

для сгруппированного распределения.

При малых объёмах выборки n для оценки дисперсии σ^2 используют **исправленную** выборочную дисперсию S^{*^2}:

$$S^{*^2} = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \tag{14.8}$$

Оценка S^{*^2} является ***несмещённой***, состоятельной оценкой дисперсии σ^2.

Формула (14.8) позволяет вычислять S^{*^2} для простой совокупности. Для сгруппированных данных используют аналогичную формулу (14.9):

$$S^{*^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - \bar{x})^2. \tag{14.9}$$

Замечание 14.1. *Исправленное выборочное СКО S^* является несмещённой оценкой СКО S.*

Пример 14.1. *Выборка задана в виде распределения частот:*

x_i	*3*	*5*	*8*	*10*	*11*
m_i	*20*	*25*	*30*	*15*	*10*

Найти моду, медиану и эмпирическую функцию распределения.

◀Здесь объём выборки

$$n = 20 + 25 + 30 + 15 + 10 = 100.$$

Мода и медиана равна 8. Найдем относительные частоты:

$$P_1^* = 20/100 = 1/5, \quad P_2^* = 25/100 = 1/4, \quad , P_3^* = 30/100 = 3/10,$$

$$P_4^* = 15/100 = 3/20, \qquad P_5^* = 10/100 = 1/10.$$

Тогда распределение относительных частот примет вид:

x_i	3	5	8	10	11
P_i^*	0,2	0,25	0,3	0,15	0,1

Из этой таблицы нетрудно убедиться, что

$$\sum_{i=1}^{5} P_i^* = 1.$$

Получаем эмпирическую функцию распределения

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 3, \\ 0{,}2 & \text{при} \quad x \in (3, 5], \\ 0{,}45 & \text{при} \quad x \in (5, 8], \\ 0{,}75 & \text{при} \quad x \in (8, 10], \\ 0{,}9 & \text{при} \quad x \in (10, 11], \\ 1 & \text{при} \quad x > 11. \end{cases}$$

▶

Пример 14.2. *Выборка задана в виде распределения частот:*

x_i	*3*	*5*	*8*	*10*	*11*	*15*
m_i	*5*	*10*	*30*	*25*	*22*	*8*

◀Здесь объём выборки

$$n = 5 + 10 + 30 + 25 + 22 + 8 = 100.$$

Мода равна 8, а медиана равна 10. ▶

Пример 14.3. *Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма* $n = 80$*:*

x_i	0,9	1	1,2	1,4	1,5
m_i	10	25	20	15	10

Найти несмещённую оценку генерального среднего, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

◀Несмещённой оценкой генерального среднего является выборочное среднее. Тогда по формуле (14.2) найдем:

$$\bar{x} = \frac{1}{80}(10 \cdot 0{,}9 + 25 \cdot 1 + 20 \cdot 1{,}2 + 15 \cdot 1{,}4 + 10 \cdot 1{,}5) = 1{,}175.$$

Для нахождения выборочной дисперсии воспользуемся формулой (14.7):

$$S^2 = \frac{1}{80}(10 \cdot 0{,}9^2 + 25 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1{,}2^2 + 15 \cdot 1{,}4^2 + 10 \cdot 1{,}5^2) - (1{,}175)^2 \approx$$

$$\approx 1{,}4225 - 1{,}3806 \approx 0{,}042.$$

Заметим, что отличная от нуля дисперсия является всегда положительной величиной.

Выборочное среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{0{,}042} \approx 0{,}205$. ▶

Пример 14.4. *По выборке объёма $n = 50$ найдена смещённая оценка $S^2 = 9{,}8$ генеральной дисперсии. Найти несмещённую оценку дисперсии генеральной совокупности.*

◀Согласно (14.8), исправленная выборочная дисперсия, являющаяся в то же время несмещённой оценкой

$$S^{*2} = \frac{n}{n-1} \cdot S^2 = \frac{50}{49} \cdot 9{,}8 = 10.$$ ▶

Пример 14.5. *Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормального распределения, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$, выборочное среднее $\bar{x} = 32$ и объём выборки $n = 36$.*

Необходимый теоретический материал из лекции 7.

Определение 14.6. *Доверительным интервалом для несмещённого параметра a называют интервал $(a_1; a_2)$ со случайными границами, зависящими от наблюдений: $a_1 = a_1(x_1, \ldots, x_n)$, $a_2 = a_2(x_1, \ldots, x_n)$, накрывающий неизвестный параметр с заданной вероятностью γ: $P\big(a \in (a_1; a_2)\big) = \gamma$.*

Вероятность γ называется доверительной вероятностью или надежностью доверительного интервала.

Обычно γ задают равным 0,9; 0,95; 0,99 и более.

Доверительный интервал $\mathbf{I}_\gamma$ для неизвестного математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии имеет вид:

$$\mathbf{I}_\gamma \left(\bar{x} - \tau_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + \tau_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \tag{14.10}$$

где величина $\tau_{\frac{\gamma}{2}}$ определяется из уравнения:

$$\Phi(\tau_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2} \tag{14.11}$$

◀В данном примере воспользуемся выражением (14.10). Поскольку здесь $\gamma = 0{,}99$, то параметр $\tau_{\frac{\gamma}{2}}$ найдем с помощью равенства:

$$\Phi(\tau_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}99}{2} = 0{,}495.$$

Отсюда по таблицам функции Лапласа определим $\tau_{\frac{\gamma}{2}} = 2{,}57$. Здесь левая граница интервала

$$\bar{x} - \tau_{\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 32 - 2{,}57 \cdot \frac{3}{6} = 32 - 1{,}285 = 30{,}715.$$

Правая граница определится как $32 + 1{,}285 = 33{,}285$. Таким образом, искомый доверительный интервал для математического ожидания a будет

$$30{,}715 < a < 33{,}285.$$

Полученный результат означает, что с вероятностью 0,99 математическое ожидание генеральной совокупности находится в интервале $\mathbf{I}_\gamma = \Big(30{,}715;\ 33{,}285\Big)$.▶

Пример 14.6. *Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма $n = 16$:*

x_i	*3,5*	*4,1*	*4,7*	*5,4*	*5,6*	*6,2*
m_i	*2*	*3*	*2*	*4*	*3*	*2*

Оценить с надежностью 0,95 *математическое ожидание a нормально распределённой случайной величины по выборочному среднему с помощью доверительного интервала.*

Необходимый теоретический материал из лекции 7.

Доверительный интервал $\mathbf{I}_\gamma$ *для неизвестного математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии имеет вид:*

$$\mathbf{I}_\gamma\left(\bar{x}-t_\gamma\frac{S^*}{\sqrt{n}};\ \bar{x}+t_\gamma\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right), \tag{14.12}$$

где величина t_γ определяется по таблице приложения 3 критических точек распределения Стьюдента для $\alpha = 1-\gamma$ и $k = n-1$ или с помощью компьютера из уравнения для функции распределения Стьюдента $F_{st}(x)$ с $n-1$ степенью свободы:

$$F_{st}(t_\gamma) = \frac{1+\gamma}{2}, \tag{14.13}$$

где $\bar{x}$ и S^* — соответственно выборочное среднее и исправленное СКО.

Если независимые случайные величины $\xi_i \sim N(a;\sigma)$, $i = 1,\ \ldots, n$, то случайная величина

$$t = \frac{\bar{\xi}-a}{S^*/\sqrt{n}} \tag{14.14}$$

имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы.

◀В данном случае дисперсия неизвестна и доверительный интервал определяется по формуле (14.12). Выборочное среднее вычислим по формуле (14.2):

$$\bar{x} = \frac{1}{16}(2\cdot 3,5 + 3\cdot 4{,}1 + 2\cdot 4{,}7 + 4\cdot 5{,}4 + 3\cdot 5{,}6 + 2\cdot 6{,}2) \approx 4{,}9698.$$

Выборочную дисперсию удобнее искать с помощью выражения (14.7):

$S^2 = \dfrac{1}{16}\sum_{i=1}^{6} m_i x_i^2 - (\bar{x})^2 =$

$= \dfrac{1}{16}(2\cdot 3,5^2 + 3\cdot 4{,}1^2 + 2\cdot 4{,}7^2 + 4\cdot 5{,}4^2 + 3\cdot 5{,}6^2 + 2\cdot 6{,}2^2) - 4{,}9698^2 \approx 0{,}7309.$

Согласно (14.8), исправленная выборочная дисперсия

$$S^{*2} = \frac{16}{15}\cdot 0{,}7309 = 0{,}7796.$$

Отсюда находим исправленное СКО $S^* \approx 0{,}883$. При $\alpha = 1-\gamma = 0{,}05$ и числе степеней свободы $n-1 = 15$ из таблицы приложения 3 определим $t_\gamma = 2{,}13$. Находим радиус доверительного интервала

$$\varepsilon = t_\gamma\cdot\frac{S^*}{\sqrt{n}} = 2{,}13\frac{0{,}883}{\sqrt{16}} \approx 0{,}47.$$

Находим доверительный интервал

$$I_\gamma = (\bar{x} - \varepsilon;\ \bar{x} + \varepsilon) = (4{,}499;\ 5{,}439). \blacktriangleright$$

Пример 14.7. *Из генеральной совокупности, являющейся нормальной случайной величиной ξ, извлечена выборка объёма $n = 50$, результаты которой сгруппированы с постоянным размахом интервала h=4 и помещены в таблицу.*

i	1	2	3	4	5	6
$(x_i; x_{i+1}]$	(10; 14]	(14; 18]	(18; 22]	(22; 26]	(26; 30]	(30; 34]
m_i	4	11	15	12	6	2

1) Построить гистограмму относительных частот по сгруппированным данным, где m_i – частота попадания вариант в промежуток $(x_i; x_{i+1}]$.

2) Найти эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$.

3) На основании данного распределения, найти выборочную среднюю $\overline{x}$, несмещённую выборочную дисперсию S^{*2}, моду M_o и медиану M_e.

4) Найти доверительные интервалы для оценки, с надежностью $\gamma_1 =$ 0,9, $\gamma_2 =$ 0,95 и $\gamma_3 =$ 0,99 , неизвестного математического ожидания $M(\xi) = a$ генеральной совокупности в предположении, что она распределена нормально.

1) ◀Находим вектор относительных частот наблюдений, попавших в i-тый интервал $P_i^* = \dfrac{m_i}{n}$.

$P^* = [4/50, 11/50, 15/50, 12/50, 6/50, 2/50] =$

$= [0.08, 0.22, 0.3, 0.24, 0.12, 0.04]$.

Делим полученный вектор относительных частот на размах интервалов $h = 4$, получаем вектор плотности относительной частоты. $\dfrac{P^*}{h} = [4/200, 11/200, 15/200$

$= [0.02, 0.055, 0.075, 0.06, 0.03, 0.01]$.

Строим график, рис. 52, состоящий из шести прямоугольников ширина каждого из них равна 4, а высота $\dfrac{P_i^*}{h}$. Площадь полученной фигуры равна 1. Если увеличивать объём выборки и количество интервалов, то верхняя линия гистограммы приближается к функции плотности генеральной совокупности непрерывной случайной величины. ▶

2) ◀Находим эмпирическую функцию распределения по формуле $F^*(x) = P^*(\xi < x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n_x — число наблюдений меньших x. При задании выборки в виде группового распределения, где значения частот относятся к центру интервалов (массив координат

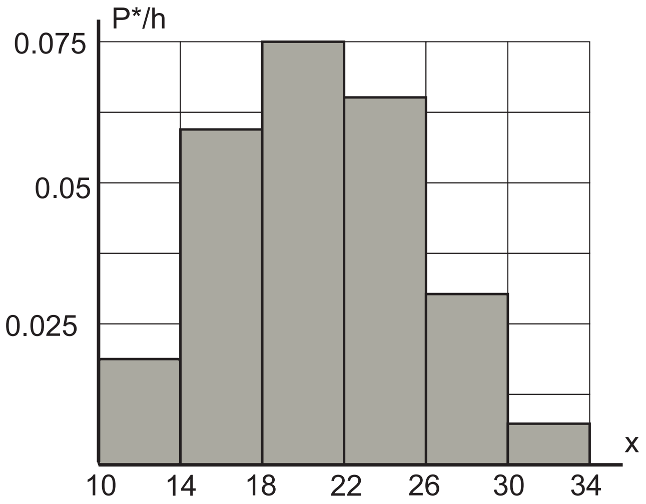

Рисунок 52. *Гистограмма*

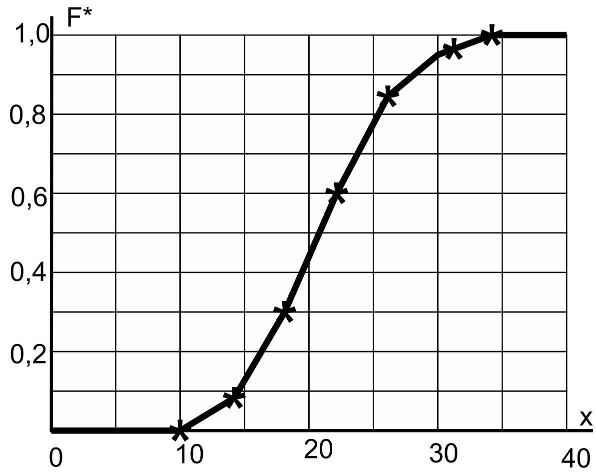

Рисунок 53. *Функция распределения* $F^*(x)$

$D = [12, 16, 20, 24, 28, 32]$). Предполагаем, что на каждом отрезке исследуемая случайная величина распределена равномерно, следовательно функция распределения линейная. Поведение эмпирической функции распределения $F^*(x)$ на каждом i-том отрезке аппроксимируем непрерывной линейно возрастающей функцией. Тогда функцию распределения строим в виде кусочно-линейной кривой. Уравнение прямой проходящей через две точки с координатами (x_i, y_i) и $(x_i+\Delta x, y_i+\Delta y_i)$ записывается в виде $y = y_i+\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x}(x-x_i)$. Для нашего примера $x_i = 10 + 4(i - 1)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, а $y_1 = 0$, $y_i = y_{i-1} + P_i, i = 2, 3, \ldots, 7$, т.е, массивом $Y = [0, 0.08, 0.3, 0.6, 0.84, 0.96, 1]$. $\Delta y_i = [0.08, 0.22, 0.3, 0.24, 0.12, 0.04]$.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 10, \\ 0{,}02(x-10) & \text{при} \quad x \in (10, 14], \\ 0{,}08 + 0,055(x-14) & \text{при} \quad x \in (14, 18], \\ 0{,}3 + 0,075(x-18) & \text{при} \quad x \in (18, 22], \\ 0{,}6 + 0,06(x-22) & \text{при} \quad x \in (22, 26], \\ 0{,}84 + 0,03(x-26) & \text{при} \quad x \in (26, 30], \\ 0{,}96 + 0,01(x-30) & \text{при} \quad x \in (30, 34], \\ 1 & \text{при} \quad x > 36. \end{cases}$$

Строим график эмпирической функции распределения $F^*(x)$, рис. 53.▶

3) ◀Находим выборочную среднюю $\overline{x}$, несмещённую выборочную дисперсию S^{*2}, моду M_o и медиану M_e.

По формуле (14.2) находим выборочную среднюю $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} m_i d_i =$
$= \dfrac{1}{50}(4 \cdot 12 + 11 \cdot 16 + 15 \cdot 20 + 12 \cdot 24 + 6 \cdot 28 + 2 \cdot 32) = 20{,}88.$

По формуле (14.6) находим выборочную дисперсию

$\overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \cdot d_i^2 =$
$= \dfrac{1}{50}(4 \cdot 12^2 + 11 \cdot 16^2 + 15 \cdot 20^2 + 12 \cdot 24^2 + 6 \cdot 28^2 + 2 \cdot 32^2) = 461{,}12.$

$S^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 461{,}12 - 20{,}88^2 = 25{,}146.$

По формуле (14.8) находим несмещённую выборочную дисперсию:
$S^{*^2} = \dfrac{n}{n-1}S^2 = \dfrac{50}{49} \cdot 25{,}146 = 25{,}659.$

Несмещённое выборочное средне квадратическое отклонение $S^* = \sqrt{S^{*^2}} =$ $5{,}066$. Для выборки, представленной в виде сгруппированного распределения, значение моды аппроксимируются в некоторую точку модального интервала (внутри которого находится максимальное значение):

$$M_0 = X_0 - h\frac{f_{mo} - f_{mo-1}}{f_{m0-1} - 2f_{mo} + f_{mo+1}},$$

где X_O — нижнее значение модального интервала; f_{mo}, f_{mo-1}, f_{mo+1} — значение частот в модальном, предыдущем и следующем интервалах, соответственно; h — размах модального интервала.

Для решаемой задачи: $mo = 3$, $X_0 = 18$, $f_{mo} = 15, f_{mo-1} = 11$, $f_{mo+1} = 12$, $h = 4$.

$$M_0 = 18 - 4\frac{15 - 11}{11 - 30 + 12} \approx 20{,}286.$$

Для выборки, представленной в виде сгруппированного распределения, значение медианы аппроксимируются в некоторую точку M_e медианного интервала по формуле:

$$M_e = X_0 + h\frac{0{,}5\sum\limits_{k=1}^{s} f_k - \sum\limits_{k=1}^{me-1} f_k}{f_{me}},$$

где X_O — нижняя граница, в котором находится медиана (медианный интервал me); f_{me} —– значение частоты в медианном интервале; h — размах медианного интервала.

$$M_e = 18 + 4\frac{25-(4+11)}{15} \approx 20{,}667.$$

▶

4) ◀Найти доверительные интервалы для оценки с надежностью $\gamma_1 = 0{,}9$, $\gamma_2 = 0{,}95$ и $\gamma_3 = 0{,}99$, неизвестного математического ожидания $M(\xi) = a$ генеральной совокупности в предположении, что она распределена нормально.

Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии вычисляем по формуле (14.12) $\left(\bar{x} - t_\gamma \frac{S^*}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + t_\gamma \frac{S^*}{\sqrt{n}}\right)$, где величина t_γ определяется по таблице приложения 3 критических точек распределения Стьюдента для $\alpha = 1-\gamma$ и $k = n-1$ или с помощью компьютера из уравнения для функции распределения Стьюдента $F_{st}(x)$ с $k = n-1 = 49$ степенью свободы. $\alpha_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 0{,}05$, $\alpha_3 = 0{,}01$.

$t_{\gamma_1} = 1{,}675; \quad t_{\gamma_2} = 2{,}01; \quad t_{\gamma_3} = 2{,}68.$

Находим радиусы доверительных интегралов $\varepsilon_i = t_{\gamma_i}\dfrac{S^*}{\sqrt{n}}, i = 1, 2, 3.$

$$\varepsilon_1 = 1{,}675\frac{5{,}065}{\sqrt{50}} = 1{,}22;\ \ \varepsilon_2 = 2{,}01\frac{5{,}065}{\sqrt{50}} = 1{,}44;\ \ \varepsilon_3 = 2{,}68\frac{5{,}065}{\sqrt{50}} = 1{,}92.$$

Отметим, что с увеличением надёжности радиус доверительного интервала увеличивается.

Находим доверительные интервалы.

$I_{\gamma_1} = (19{,}68; 22{,}08); \quad I_{\gamma_2} = (19{,}44; 22{,}32); \quad I_{\gamma_3} = (18{,}96; 22{,}8).$

Это означает, что выполняются вероятностные равенства

$P(19{,}68 < M(\xi) < 22{,}08) = 0{,}9;$

$P(19{,}44 < M(\xi) < 22{,}32) = 0{,}95;$

$P(18{,}96 < M(\xi) < 22{,}8) = 0{,}99.$ ▶

Пример 14.8. *Случайная величина ξ генеральной совокупности распределена нормально при этом известно средне квадратическое отклонение $\sigma = 2$.*

1) С надежностью $\gamma_1 = 0{,}9$, $\gamma_1 = 0{,}95$ и $\gamma_2 = 0{,}99$ найти доверительные интервалы для оценки математического ожидания генеральной совокупности, если объем выборки $n = 40$ и среднее выборочное $\overline{x} = -5$.

2) Как изменится радиусы доверительных интервалов при увеличении объёма выборки в четыре раза тех же значениях среднего квадратического отклонения и надёжности.

◀Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии имеет вид (14.10): $\left(\bar{x} - \tau_{\gamma/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + \tau_{\gamma/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где величина $\tau_{\gamma/2}$ определяется из уравнения (14.11): $\Phi(\tau_{\gamma/2}) = \frac{\gamma}{2}$.

1) ◀Найдём значения величин $\tau_{\gamma_1/2}, \tau_{\gamma_2/2}, \tau_{\gamma_3/2}$.

$$\Phi(\tau_{\gamma_1/2}) = \frac{\gamma_1}{2} = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45.$$

Отсюда, по таблицам функции Лапласа определим $\tau_{\gamma_1/2} = 1{,}65$.

Аналогично,

$$\Phi(\tau_{\gamma_2/2}) = 0{,}475 \Rightarrow \tau_{\gamma_2/2} = 1{,}96.$$

$$\Phi(\tau_{\gamma_3/2}) = 0{,}495 \Rightarrow \tau_{\gamma_3/2} = 2{,}58.$$

Находим радиусы доверительных интегралов $\varepsilon_i, i = 1, 2, 3$,

$$\varepsilon_i = \tau_{\gamma_i/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$\varepsilon_1 = 0{,}522; \quad \varepsilon_2 = 0{,}620; \quad \varepsilon_3 = 0{,}816.$

Мы видим, что радиусы доверительных интегралов с увеличением надёжности расширяются.

Находим доверительные интервалы.

$I_{\gamma_1} = (-5{,}522; -4{,}478); \quad I_{\gamma_2} = (-5{,}62; -4{,}38); I_{\gamma_3} = (-5{,}816; -4{,}184).$▶

2) ◀При увеличении объёма выборки в четыре раза, радиус доверительного интервала уменьшиться в два раза

$\varepsilon_1 = 0{,}261; \quad \varepsilon_2 = 0{,}310; \quad \varepsilon_3 = 0{,}409$

и доверительные интервалы будут равны

$I_{\gamma_1} = (-5{,}261; -4{,}439); \quad I_{\gamma_2} = (-5{,}31; -4{,}69); \quad I_{\gamma_3} = (-5{,}408; -4{,}592).$

▶

Задания для самостоятельной работы

В таблице 13.8 даны 30 вариантов заданий. По данным в таблице результатам измерений найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a нормального распределения с заданной надежностью γ.