

12. Контрольная работа №2

Примерный вариант контрольной работы №2

ПРИМЕР 12.1. В урне из 15 шаров 3 белых. Шар извлекают, смотрят цвет и кладут на место. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины ξ — числа извлечённых белых шаров при 8 подходах и вероятность того, что белый шар появится не менее двух раз.

ПРИМЕР 12.2. Лампочки проверяют до первой бракованной, но всего имеется 5 лампочек. Составить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа проверенных лампочек. Вероятность работы любой лампочки равна 0,8. Найти функцию распределения д.с.в. ξ , $M(\xi)$, $D(\xi)$ и построить её график.

ПРИМЕР 12.3. Непрерывная случайная величина ξ задаётся плотностью распределения вероятностей $f(x) = \begin{cases} \frac{A}{1+x^2}, & x \in (-1; 1], \\ 0, & x \notin (-1; 1]. \end{cases}$ Найти вероятность попадания ξ в интервал $(0; \sqrt{3}/3)$.

ПРИМЕР 12.4. Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 4$. Найти функцию распределения $F(x)$ н.с.в. ξ , $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(0,25 \leq \xi \leq 0,75)$ и отобразить графически полученное решение.

ПРИМЕР 12.5. Дискретные случайные величины ξ и η независимы. Найти ряд распределения дискретной случайной величины $\theta = 2\xi - 4\eta$, математическое ожидание и дисперсию θ . Ряды распределения д.с.в. ξ и η равны:

ξ	0	1	2
P	0,5	0,25	0,25

η	-1	0
P	0,5	0,5

ПРИМЕР 12.6. Непрерывный случайный вектор $(\xi; \eta)$ задаётся плотностью распределения вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} A \cos x \cos y, & (x, y) \in D : \{x \in (0; \pi/2], y \in (0; \pi/2]\}, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Найти функции плотности распределения случайных величин $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ и схематически постройте их графики. Найдите $M(\xi)$ и $M(\eta)$.

Решение примерного варианта контрольной работы №2

ПРИМЕР 12.1. В урне из 15 шаров 3 белых. Шар извлекают, смотрят цвет и кладут на место. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины ξ — числа извлечённых белых шаров при 8 подходах и вероятность того, что белый шар появится не менее двух раз.

Необходимый теоретический материал из лекции 4.

Пусть проведено n независимых испытаний с вероятностью p появления события A в каждом испытании (испытания Бернулли). Обозначим ξ — случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях. По формуле Бернулли

$$P(\xi = m) = P(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p, m = 0, 1, \dots, n. \quad (12.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Распределение дискретной случайной величины, задаваемое нижеприведенной таблицей, называется биномиальным.

ξ	0	1	2	...	k	...	$n-1$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$np^{n-1}q$	p^n

$$M(\xi) = n \cdot p, D(\xi) = n \cdot p \cdot q. \quad (12.2)$$

◀ Найдём искомые вероятности по формуле Бернулли при $n = 8$, $p = \frac{3}{15} = 0,2$.

$$P_8(0) = 0,8^8 = 0,16777216; \quad P_8(1) = 8 \cdot 0,2 \cdot 0,8^7 = 0,3355443.$$

Пусть A искомое событие. Тогда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (P_8(0) + P_8(1)) \approx 0,497$$

По формулам (12.2) находим:

$$M(\xi) = n \cdot p = 8 \cdot 0,2 = 1,6; \quad D(\xi) = npq = 8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 1,28. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $P(A) \approx 0,497$, $M(\xi) = 1,6$, $D(\xi) = 1,28$.

ПРИМЕР 12.2. Лампочки проверяют до первой бракованной, но всего имеется 5 лампочек. Составить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа проверенных лампочек. Вероятность работы любой лампочки равна 0,8. Найти функцию распределения д.с.в. ξ , $M(\xi)$, $D(\xi)$ и построить её график.

◀ Случайная величина ξ может принимать следующие значения:

1, 2, 3, 4, 5. Найдем вероятности, с которыми она принимает эти значения. Здесь имеет место геометрическое распределение, где $p = 0,8$, $q = 0,2$.

$P(\xi = 1)$ есть вероятность, что первая лампочка оказалась бракованной. Значение этой вероятности, согласно условию, равна 0,2;

$$P(\xi = 1) = 0,2; \quad P(\xi = 2) = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16;$$

$$P(\xi = 3) = 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,128;$$

$$P(\xi = 4) = 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,1024.$$

Событие состоящее в том, что будут проверены все пять лампочек будет состоять из двух событий: первые четыре лампочки исправны, а пятая неисправна и все пять исправны.

Данная вероятность равна

$$P(\xi = 5) = 0,8^4 \cdot 0,2 + 0,8^5 = 0,8^4(0,2 + 0,8) = 0,8^4 = 0,4096.$$

Таким образом, ряд распределения имеет вид:

ξ	1	2	3	4	5
p	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^n x_k p_k = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,16 + 3 \cdot 0,128 + 4 \cdot 0,1024 + 5 \cdot 0,4096 = 3,3616.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi).$$

$$M(\xi^2) = \sum_{k=1}^n (x_k)^2 p_k = 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,16 + 9 \cdot 0,128 + 16 \cdot 0,1024 + 25 \cdot 0,4096 = 13,8704.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 13,8704 - 3,3616^2 \approx 2,57.$$

Найдём теперь функцию распределения $F(x) = P(\xi < x)$.

При $x \leq 1$ функция $F(x) = 0$, так как ξ не принимает значений, меньших единицы. Если $1 < x \leq 2$, то $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 1) = 0,2$. Если $2 < x \leq 3$, то событие, заключающееся в том, что случайная величина ξ удовлетворяет неравенству $\xi < x$, можно представить как сумму двух несовместных событий: $\xi < 2$ и $2 \leq \xi < 3$. Поэтому по теореме сложения имеем:

$$F(x) = P(\xi < x) = P((\xi < 2) + (2 \leq \xi < 3)) = P(\xi < 2) + P(2 \leq \xi < 3) = 0,36$$

и так далее.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ 0,2, & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,36, & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 0,488, & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 0,5094, & \text{при } 4 < x \leq 5, \\ 1, & \text{при } 5 < x. \end{cases}$$

График этой функции $F(x)$ является ступенчатой линией со скачками в точках $x = k, k = 1, 2, 3, 4, 5$, равными вероятностям $P(\xi = k)$, рис. 44. ►

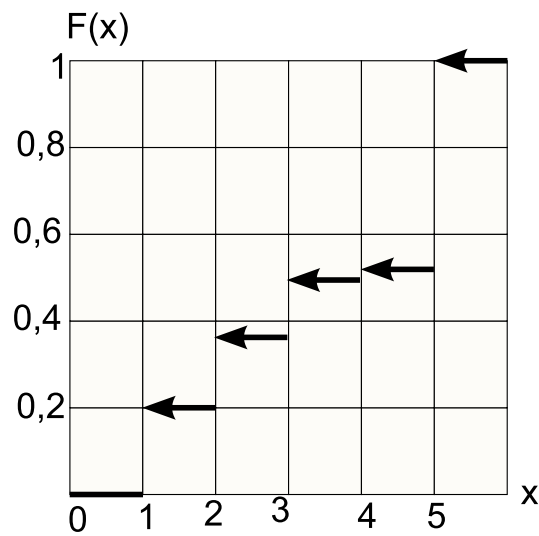


Рисунок 44. $F(x)$

ПРИМЕР 12.3. Непрерывная случайная величина ξ задаётся плотностью распределения вероятностей $f(x) = \begin{cases} \frac{A}{1+x^2}, & x \in (-1; 1], \\ 0, & x \notin (-1; 1]. \end{cases}$ Найти вероятность попадания ξ в интервал $(0; \sqrt{3}/3)$. Построить графики функции плотности вероятностей и функции распределения вероятностей.

◀ Для нахождения A воспользуемся свойством плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{A}{1+x^2} dx = 1 \Leftrightarrow A \arctan x \Big|_{-1}^1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$A(\arctan(1) - \arctan(-1)) = A \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = A\pi/2 \Rightarrow A = \frac{2}{\pi}. \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+x^2)}, & x \in (-1; 1], \\ 0, & x \notin (-1; 1]. \end{cases}$$

График плотности $f(x)$ изображен на рис. 45.

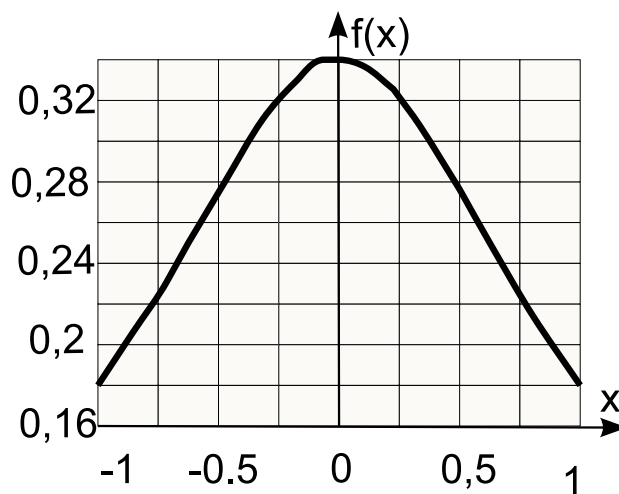


Рисунок 45. $f(x)$

Для нахождения функции распределения $F(x)$, связанной с плотностью формулой $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, рассмотрим три возможных случая расположения x :

$$(1) \ x \leq -1 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0;$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad -1 < x \leq 1 &\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^x \frac{2}{\pi(1+t^2)} dt = \\
 &= \frac{2}{\pi} \arctan t \Big|_{-1}^x = \frac{2}{\pi} \left(\arctan x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2 \arctan x}{\pi};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad 1 < x &\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^1 \frac{2}{\pi(1+t^2)} dt + \int_1^x 0 dt = \\
 &= \frac{2}{\pi} (\arctan t) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 1.
 \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1; \\ \frac{1}{2} + \frac{2 \arctan x}{\pi} & \text{при } -1 < x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

График $F(x)$ представлен на рис.46.

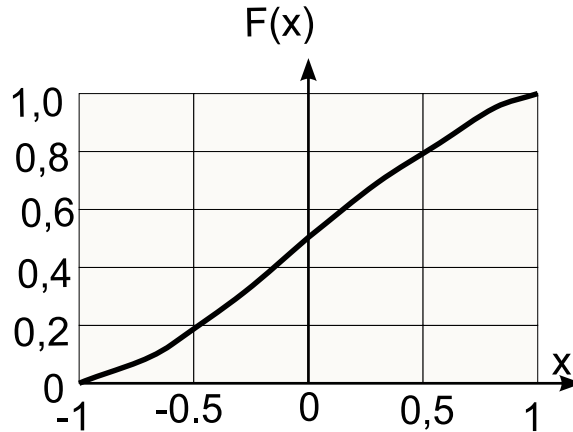


Рисунок 46. $F(x)$

$$\begin{aligned}
 P\left(x \in (0; \sqrt{3}/3)\right) &= F(\sqrt{3}/3) - F(0) = \left(0,5 + \frac{2 \arctan(\sqrt{3}/3)}{\pi}\right) - \\
 &- \left(0,5 + \frac{2 \arctan(0)}{\pi}\right) = \frac{2\pi/6}{\pi} = 1/3. \blacktriangleright \\
 \text{Ответ: } A &= \frac{1}{\pi}, P(x \in (0; \sqrt{3}/3)) = 1/3.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 12.4. Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 4$. Найти функцию распределения $F(x)$ н.с.в. ξ , $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(0,25 \leq \xi \leq 0,75)$ и отобразить графически полученное решение.

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2. Распределение непрерывной случайной величины называется экспоненциальным (показательным), если плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad \text{где } \lambda > 0. \quad (12.3)$$

Экспоненциальное распределение определяется одним параметром $\lambda > 0$.

Математическое ожидание и дисперсия равны

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (12.4)$$

◀ Найдем функцию распределения:

$$\text{при } x \geq 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x 4e^{-4t} dt = -e^{-4t} \Big|_0^x = 1 - e^{-4x};$$

$$\text{при } x < 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

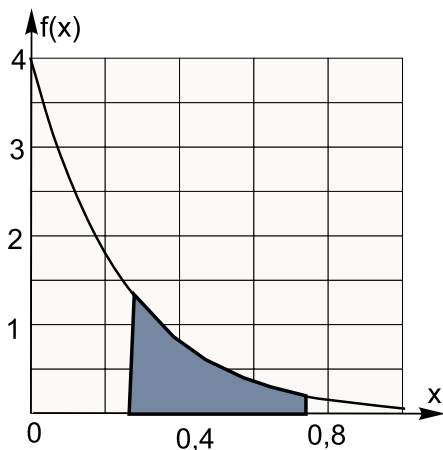


Рисунок 47. Функция $f(x)$

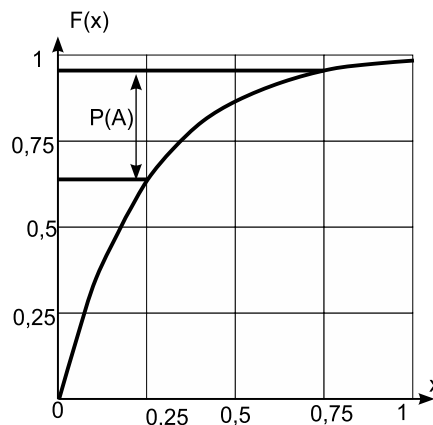


Рисунок 48. Функция $F(x)$

По формулам 12.4, числовые характеристики случайной величины ξ

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda} = 0,25, \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2} = 0,625.$$

$$P(0,25 \leq \xi \leq 0,75) = F(0,75) - F(0,25) = (1 - e^{-4 \cdot 0,75}) - (1 - e^{-4 \cdot 0,25}) = \\ = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^3} \approx 0,318.$$

На рис. 47 изображен график функции плотности данного распределения. Искомая вероятность равна закрашенной области. На рис. 48 представлен график функции распределения. Искомая вероятность равна приращению функции $F(0,75) - F(0,25)$. ►

ПРИМЕР 12.5. Дискретные случайные величины ξ и η независимы. Найдите ряд распределения дискретной случайной величины $\theta = 2\xi - 4\eta$, математическое ожидание и дисперсию θ . Ряды распределения д.с.в. ξ и η равны:

ξ	0	1	2
P	0,5	0,25	0,25

η	-1	0
P	0,5	0,5

◀ Ряды распределения д.с.в. 2ξ и -4η равны:

2ξ	0	2	4
P	0,5	0,25	0,25

-4η	0	4
P	0,5	0,5

$$M(\xi) = 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,25 = 0,75.$$

$$M(\eta) = -1 \cdot 0,5 = -0,5.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 1^2 \cdot 0,25 + 2^2 \cdot 0,25 - (0,75)^2 = 0,25 + 1 - 0,5625 = 0,6875.$$

$$D(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta) = (-1)^2 \cdot 0,5 - 0,25 = 0,25.$$

Случайная величина $\theta = 2\xi - 4\eta$ принимает следующие значения:

$\theta = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Найдём вероятности

$$P(\theta = 0) = P(2\xi = 0) \cdot P(-4\eta = 0) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25.$$

$$P(\theta = 2) = P(2\xi = 2) \cdot P(-4\eta = 0) = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125.$$

$$P(\theta = 4) = P(2\xi = 0) \cdot P(-4\eta = 4) + P(2\xi = 4) \cdot P(-4\eta = 0) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,5 = 0,375.$$

$$P(\theta = 6) = P(2\xi = 2) \cdot P(-4\eta = 4) = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125.$$

$$P(\theta = 8) = P(2\xi = 4) \cdot P(-4\eta = 4) = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125.$$

θ	0	2	4	6	8
P	0,25	0,125	0,375	0,125	0,125

$$M(\theta) = 0 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,125 + 4 \cdot 0,375 + 6 \cdot 0,125 + 8 \cdot 0,125 = 16 \cdot 0,125 + 1,5 = 3,5.$$

$$D(\theta) = 4 \cdot 0,125 + 16 \cdot 0,375 + 36 \cdot 0,125 + 64 \cdot 0,125 - (3,5)^2 = 19 - 12,25 = 6,75.$$

Найдём теперь $M(\theta)$ и $D(\theta)$ используя свойства математического ожидания и дисперсии.

$$M(\theta) = 2 \cdot M(\xi) - 4 \cdot M(\eta) = 2 \cdot 0,75 + 4 \cdot 0,5 = 3,5.$$

$$D(\theta) = 2^2 \cdot D(\xi) + (-4)^2 \cdot D(\eta) = 4 \cdot 0,6875 + 16 \cdot 0,4375 = 6,75.$$

Результаты совпали. ►

ПРИМЕР 12.6. Непрерывный случайный вектор $(\xi; \eta)$ задаётся плотностью распределения вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} A \cos x \cos y, & (x, y) \in D : \{x \in (0; \pi/2], y \in (0; \pi/2]\}, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Найти функции плотности распределения случайных величин $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ и схематически постройте их графики. Найдите $M(\xi)$ и $M(\eta)$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1 &\Rightarrow A \int_0^{\pi/2} (\cos x) dx \int_0^{\pi/2} (\cos y) dy = A \left(\int_0^{\pi/2} \cos x dx \right)^2 = \\ &= A \left(\sin x \Big|_0^{\pi/2} \right)^2 = A \Rightarrow A = 1. \end{aligned}$$

Формулы $M(\xi)$ и $M(\eta)$.

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx, \quad M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y) dx dy.$$

Найдём функции плотности распределения случайных величин ξ и η

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\pi/2} \cos x \cos y dy = \cos x \sin y \Big|_0^{\pi/2} = \cos x.$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^{\pi/2} \cos x \cos y dx = \cos y \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \cos y.$$

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \int_0^{\pi/2} x d(\sin x) = \\ &= x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \pi/2 + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \pi/2 - 1. \end{aligned}$$

$$M(\eta) = \pi/2 - 1. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельной работы

Решите вариант контрольной работы №2

12.1. Детали проверяются до появления первой бракованной (число деталей неограниченно). Вероятность бракованной детали 0,1. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины ξ — числа проверенных деталей и вероятность того, что будет проверено более четырёх деталей. Отобразить графически полученное решение.

12.2. Вероятность искажения «точки» при передаче сигнала 0,1, искажения «тире» 0,2. Найти ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа искажений при передаче сигнала из трёх точек и одного тире. Найти функцию распределения д.с.в. ξ , $M(\xi)$, $D(\xi)$ и построить её график.

12.3. Непрерывная величины ξ задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} Ax^4, & x \in (0; 2], \\ 0, & x \leq 0, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Найти параметр A , функцию плотности распределения н.с.в. ξ , вероятность попадания ξ , в $[-2; 1, 5]$, $M(\xi)$, $D(\xi)$ и построить её график.

12.4. Найти среднеквадратичную ошибку измерений, если известно, что, с вероятностью 0,95, ошибка составит не более 1 см (по модулю). Систематическая ошибка отсутствует, случайные ошибки распределены по нормальному закону. Результат отобразить графически.

ξ/η	-2	0	2
-4	0	0	0,125
-2	0,25	0,25 0	0
0	0	0,25 0	0,125

12.5. Найти ряды распределения случайных величин ξ , η , $\xi + \eta$. Выяснить, зависимы ли величины ξ и η .

12.6. Непрерывный случайный вектор (ξ, η) равномерно распределён в области $G : \{x^2 + y^2 \leq 16\}$. Найти вероятность попадания случайной точки в область $D : \{|x| + |y| \leq 2\}$.