11. Двумерные случайные величины

Необходимый теоретический материал из лекции 6.

Определение 11.1. *n **-мерным случайным вектором** или n- **мерной случайной величиной** называется набор $\xi = (\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n)$ случайных величин, заданных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, A, P).*

Фактически случайный вектор ξ есть отображение $\xi : \Omega \to R^n$

11.1. Двумерные дискретные случайные величины

Определение 11.2. ***Законом распределения** дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, т.е. пар чисел $(x_i; y_j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, и их вероятностей $p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j)$.*

Закон распределения для двумерной дискретные случайной величины задается в виде таблицы с двойным входом, в которой указывают все значения x_i, y_i и вероятности p_{ij}.

$\xi \backslash \eta$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}

Далее в эту таблицу добавляют одну строку и один столбец.

Зная двумерный закон распределения, можно найти закон распределения каждой составляющей (но не наоборот).

$$\begin{gathered} P(\xi = x_i) = P(\xi = x_i, \eta = y_1) + P(\xi = x_i, \eta = y_2) + \ldots \\ \ldots + P(\xi = x_i, \eta = y_m) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_{i\,*}. \end{gathered} \tag{11.1}$$

Аналогично

$$\begin{gathered} P(\eta = y_j) = P(\xi = x_1, \eta = y_j) + P(\xi = x_2, \eta = y_j) + \ldots \\ \ldots + P(\xi = x_n, \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_{*\,j}. \end{gathered} \tag{11.2}$$

Таблица 11.1

Распределение двумерной дискретной случайной величины						
$\xi \diagdown \eta$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m	$P(\xi = x_i)$
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}	$p_{1\,*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}	$p_{i\,*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}	$p_{n\,*}$
$P(\eta = y_j)$	$p_{*\,1}$	$\ldots$	$p_{*\,j}$	$\ldots$	$p_{*\,m}$	1

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i\,*}, \qquad M(\eta) = \sum_{j=1}^{m} y_j p_{*\,j}. \tag{11.3}$$

Определение 11.3. *Точка с координатами $\big(M(\xi); M(\eta)\big)$ называется* ***центром распределения***.

Условные вероятности

$$P(\eta = y_j/\xi = x_i) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\xi = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\,*}}. \tag{11.4}$$

$$P(\xi = x_i/\eta = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{*\,j}}. \tag{11.5}$$

Вероятности $P(\eta = y_j/\xi = x_i)$ для $j = 1, \ldots, m$ образуют условное распределение случайной величины η при фиксированном значении ξ. В частности, можно найти условное математическое ожидание η при фиксированном значении ξ:

$$M(\eta/\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(\eta = y_j/\xi = x_i) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n \tag{11.6}$$

и условное математическое ожидание ξ при фиксированном значении η:

$$M(\xi/\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(\xi = x_i/\eta = y_j) \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, m. \tag{11.7}$$

Для независимых дискретных случайных величин ξ и η

$$P(\eta = y_j/\xi = x_i) = P(\eta = y_j) \quad \text{и} \quad P(\xi = x_i/\eta = y_j) = P(\xi = x_i).$$

$$P(\eta = y_j/\xi = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i*}} = \frac{p_{i*} \cdot p_{*j}}{p_{i*}} = p_{*j} \; .$$

$$P(\xi = x_i/\eta = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{*j}} = \frac{p_{i\cdot} \cdot p_{*j}}{p_{*j}} = p_{i*} \; .$$

Определение 11.4. ***Корреляционным моментом*** $K_{\xi\eta}$ *случайных величин ξ и η называют:*

$$K_{\xi\eta} = M\left(\big(\xi - M(\xi)\big)\big(\eta - M(\eta)\big)\right).$$

$$K_{\xi\eta} = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta). \tag{11.8}$$

Вычисление корреляционного момента по формуле (11.8) для дискретных случайных величин сводится к вычислению суммы:

$$K_{\xi\eta} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i y_j - M(\xi) \cdot M(\eta),$$

а для непрерывных — интеграла:

$$K_{\xi\eta} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x;\, y)dxdy - M(\xi) \cdot M(\eta).$$

Теорема 11.13. *Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.*

Пример 11.1. *Задана дискретная двумерная случайная величина (ξ, η):*

$\xi\backslash\eta$	4	7	8
3	0,1	0,2	0,1
5	0,3	0,1	0,2

Найти законы распределения составляющих ξ и η, безусловное и условное математическое ожидание ξ при условии $\eta = 7$, а также безусловное и условное математическое ожидание η при $\xi = 5$. Найти корреляционный момент $K_{\xi\eta}$.

◀ Сложив вероятности по строкам, получим закон распределения составляющей ξ:

ξ	3	5
p	0,4	0,6

Если сложим вероятности по столбцам, то придем к закону распределения составляющей η:

η	4	7	8
p	0,4	0,3	0,3

С помощью последних таблиц легко найдем безусловные математические ожидания:

$$M(\xi) = 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}6 = 4{,}2,$$

$$M(\eta) = 4 \cdot 0{,}4 + 7 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}3 = 6{,}1.$$

Вероятность $P(\eta = 7) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$. Согласно (11.5), $P\left(\xi = x_i / \zeta = y_j\right) = \dfrac{p_{ij}}{p_{*\,j}}$, условные вероятности

$$P(\xi = 3/\eta = 7) = 0{,}2/0{,}3 = 2/3,$$

$$P(\xi = 5/\eta = 7) = 0{,}1/0{,}3 = 1/3.$$

Условный закон распределения $\xi/\eta = 7$ примет вид:

$\xi/\eta = 7$	3	5
$P(\xi = x_i/\eta = 7)$	2/3	1/3

Соответствующее условное математическое ожидание

$$M(\xi/\eta = 7) = 3 \cdot 2/3 + 5 \cdot 1/3 = 11/3.$$

Вероятность $P(\xi = 5) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}6$. Далее по формуле (11.4) вычисляем условные вероятности

$$P(\eta = 4/\xi = 5) = 0{,}3/0{,}6 = 1/2,$$

$$P(\eta = 7/\xi = 5) = 0{,}1/0{,}6 = 1/6,$$

$$P(\eta = 8/\xi = 5) = 0{,}2/0{,}6 = 1/3.$$

По условному закону распределения $\eta/\xi = 5$

$\eta/\xi = 5$	4	7	8
$P(\eta = y_i/\xi = 5)$	1/2	1/6	1/3

найдем условное математическое ожидание

$M(\eta/\xi = 5) = 4 \cdot 1/2 + 7 \cdot 1/6 + 8 \cdot 1/3 = 35/6.$

Умножая значения x_i на y_j компонентов случайного вектора $(\xi;\eta)$ ξ и η и в качестве вероятностей принимая значения p_{ij} из закона распределения, получим закон распределения одномерной случайной величины $\xi\eta$:

$\xi\eta$	12	20	21	24	35	40
P	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2

$M(\xi\eta) = 12 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot 0{,}3 + 21 \cdot 0{,}2 + 24 \cdot 0{,}1 + 35 \cdot 0{,}1 + 40 \cdot 0{,}2 = 25{,}3$

Применяя формулу (11.8) найдём корреляционный момент

$K_{\xi\eta} = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta) = 25{,}3 - 4{,}2 \cdot 6.1 = -0{,}32.$ ►

Пример 11.2. *Дано распределение двумерного случайного вектора $(\xi;\eta)$ с дискретными компонентами.*

$\xi\backslash\eta$	*0*	*2*	*4*
-1	*0,05*	*0,15*	*0,15*
0	*0,2*	*0,1*	*0,1*
1	*0,15*	*0,1*	*0*

Найти корреляционный момент $K(\xi\eta)$.

◄Выпишем отдельно ряды распределения случайных величин ξ, η и $\xi\eta$.

ξ	-1	0	1
P	0,35	0,4	0,25

η	0	2	4
P	0,4	0,35	0,25

$\xi\eta$	-4	-2	0	2	4
P	0,15	0,15	0,6	0,1	0

Найдём математические ожидания $M(\xi)$, $M(\eta)$ и $M(\xi\eta)$.

$M(\xi) = -1 \cdot 0{,}35 + 1 \cdot 0{,}25 = -0{,}1.$

$M(\eta) = 2 \cdot 0{,}35 + 4 \cdot 0{,}25 = 1{,}7.$

$M(\xi\eta) = -4 \cdot 0{,}15 - 2 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot 0{,}1 = -0{,}7.$

Применяя формулу (11.8) найдём корреляционный момент

$K_{\xi\eta} = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta) = -0{,}7 + 0{,}1 \cdot 1.7 = -0{,}53.$►

Пример 11.3. *Дано распределение двумерного случайного вектора $(\xi;\eta)$ с дискретными компонентами.*

$\xi\backslash\eta$	*1*	*2*	*4*
3	*0,1*	*0,1*	*0,2*
5	*0,15*	*0,15*	*0,3*

Требуется:

1) Найти одномерные распределения случайных величин ξ, η и $\xi\eta$, их математические ожидания $M(\xi)$, $M(\eta)$ и $M\xi\eta)$ и дисперсии $D(\xi)$, $D(\eta)$ и $D(\xi\eta)$. Вычислить непосредственно их корреляционный момент $K(\xi\eta)$.

2) Доказать независимость случайных величин ξ и η.

◀Выпишем расширенную таблицу для заданного закона распределения двумерной случайной величины $\xi,\eta)$.

$\xi\backslash\eta$	1	2	4	$P(\xi=x_i)$
3	0,1	0,1	0,2	0,4
5	0,15	0,15	0,3	0,6
$P(\eta=y_j)$	0,25	0,25	0,5	1

Выпишем отдельно ряды распределения случайных величин ξ, η и $\xi\eta$.

ξ	3	5
P	0,4	0,6

η	1	2	4
P	0,25	0,25	0,5

$\xi\eta$	3	5	6	10	12	20
P	0,1	0,15	0,1	0,15	0,2	0,3

Найдём математические ожидания $M(\xi)$, $M(\eta)$ и $M(\xi\eta)$.

$M(\xi)=3\cdot 0{,}4+5\cdot 0{,}6=4{,}2.$

$M(\eta)=1\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}25+4\cdot 0{,}5=2{,}75.$

$M(\xi\eta)=3\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}15+6\cdot 0{,}1+10\cdot 0{,}15+12\cdot 0{,}2+20\cdot 0{,}3=11{,}55.$

Найдём дисперсии $D(\xi)$, $D(\eta)$ и $D(\xi\eta)$.

$D(\xi)=3^2\cdot 0{,}4+5^2\cdot 0{,}6-4{,}2^2=0{,}96.$

$D(\eta)=1^2\cdot 0{,}25+2^2\cdot 0{,}25+4^2\cdot 0{,}5-2{,}75^2=1{,}6875.$

$D(\xi\eta)=3^2\cdot 0{,}1+5^2\cdot 0{,}15+6^2\cdot 0{,}1+10^2\cdot 0{,}15+12^2\cdot 0{,}2+20^2\cdot 0{,}3-M^2(\xi\eta)=$ $=38{,}6475.$ Найдём корреляционный момент

$K(\xi\eta)=M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)=11{,}55-4{,}2\cdot 2{,}75=0.$

2) Для доказательства независимость случайных величин ξ и η проверим выполнения условий

$P(\xi=x_i,\eta=y_j)=P(\xi=x_i)\cdot P(\eta=y_j), i=1,2; j=1,2,3.$

$P(\xi=x_1)\cdot P(\eta=y_1)=0{,}25\cdot 0{,}4=0{,}1.$

$P(\xi=x_1)\cdot P(\eta=y_2)=0{,}25\cdot 0{,}6=0{,}15.$

$P(\xi=x_2)\cdot P(\eta=y_1)=0{,}25\cdot 0{,}4=0{,}1.$

$P(\xi=x_2)\cdot P(\eta=y_2)=0{,}25\cdot 0{,}6=0{,}15.$

$P(\xi=x_3)\cdot P(\eta=y_1)=0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}2.$

$P(\xi=x_3)\cdot P(\eta=y_2)=0{,}5\cdot 0{,}6=0{,}3.$

Все условия выполняются, следовательно случайных величин ξ и η независимы. ▶

Пример 11.4. *Задана дискретная случайная величина $\Theta = 10\xi - 3\eta$, где ξ и η — дискретные случайные величины из примера 11.3. Вычислить математическое ожидание $M(\Theta)$ и дисперсию $D(\Theta)$ случайной величины Θ двумя способами: на основании свойств математического ожидания и дисперсии и используя ряд распределения этой случайной величины.*

◀ Используем два свойства математическое ожидания $M(C\xi) = CM(\xi)$ и $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$.

$M(\Theta) = 10 \cdot M(\xi) - 3 \cdot M(\eta) = 10 \cdot 4{,}2 - 3 \cdot 2{,}75 = 33{,}75.$

Найдём теперь первым способом дисперсию $D(\Theta)$. Используем два свойства дисперсии ожидания $D(C\xi) = C^2 D(\xi)$ и для независимых случайных величин $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$.

$D(\Theta) = 10^2 \cdot D(\xi) + (-3)^2 \cdot D(\eta) = 100 \cdot 0{,}96 + 9 \cdot 1{,}6875 = 111{,}1875.$

Запишем ряды распределения случайных величин $10 \cdot M(\xi)$ и $-3 \cdot M(\eta)$:

10ξ	30	50
P	0,4	0,6

-3η	-12	-6	-3
P	0,5	0,25	0,25

Получаем ряд распределения случайной величины Θ:

Θ	18	24	27	38	44	47
P	$0{,}4 \cdot 0{,}5$	$0{,}4 \cdot 0{,}25$	$0{,}4 \cdot 0{,}25$	$0{,}6 \cdot 0{,}5$	$0{,}6 \cdot 0{,}25$	$0{,}6 \cdot 0{,}25$

Θ	18	24	27	38	44	47
P	0,2	0,1	0,1	0,3	0,15	0,15

Находим $M(\Theta)$:
$M(\Theta) = 18 \cdot 0{,}2 + 24 \cdot 0{,}1 + 27 \cdot 0{,}1 + 38 \cdot 0{,}3 + 44 \cdot 0{,}15 + 47 \cdot 0{,}15 = 33{,}75$
и $D(\Theta)$:
$D(\Theta) = 18^2 \cdot 0{,}2 + 24^2 \cdot 0{,}1 + 27^2 \cdot 0{,}1 + 38^2 \cdot 0{,}3 + 44^2 \cdot 0{,}15 + 47^2 \cdot 0{,}15 - 33{,}75^2 =$
$= 111{,}1875.$

Оба способа дали один и то же результат. ▶

11.2. Непрерывная двумерная случайная величина

Определение 11.5. *Функцией распределения двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$ называют*

$$F(x;y) = P\{\xi < x; \eta < y\}. \tag{11.9}$$

Определение 11.6. *Двумерная случайная величина $(\xi;\eta)$ называется непрерывной, если её функция распределения $F(x;y)$ непрерывна и имеет* *непрерывные частные производные второго порядка всюду (за исключением быть может, конечного числа кривых).*

Двумерная функция распределения обладает следующими свойствами:

(1) $0 \leqslant F(x;y) \leqslant 1$;

(2) $F(-\infty;y) = F(x;-\infty) = F(-\infty;-\infty) = 0 \quad F(+\infty;+\infty) = 1$;

(3) $F(x;y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу;

(4) Функции распределения каждой составляющей получаются предельным переходом:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = F(x;+\infty),$$
$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = F(+\infty;y);$$

(5) Вероятность попадания в прямоугольник выражается через функцию распределения по формуле:

$$\begin{gathered} P\{x_1 \leqslant \xi < x_2; y_1 \leqslant \eta < y_2\} = \\ = \big(F(x_2;y_2) - F(x_2;y_1)\big) - \big(F(x_1;y_2) - F(x_1;y_1)\big). \end{gathered} \tag{11.10}$$

Определение 11.7. *Плотностью распределения двумерной непрерывной случайной величины* $(\xi;\zeta)$ *называется вторая смешанная частная производная функции распределения:*

$$f(x;y) = \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y}. \tag{11.11}$$

Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами:

(1) $f(x;y) \geqslant 0$;

(2) $f(-\infty;y) = f(x;-\infty) = f(\pm\infty;\pm\infty) = 0$;

(3) $F(x;y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(s;t)dsdt$;

(4) Вероятность попадания двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$ в область G равна:

$$P((\xi;\eta) \in G) = \iint\limits_G f(x;y)dxdy;$$

(5) $\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dxdy = 1.$

Плотности распределения составляющих двумерной непрерывной случайной величины получаются из её плотности $f(x;y)$ по формулам (11.12):

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dy; \qquad f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx. \tag{11.12}$$

Определение 11.8. ***Условной плотностью*** *$f(y/\xi = x)$ распределения η при условии, что $\xi = x$, называется:*

$$f(y/\xi = x) = \begin{cases} 0, & f_\xi(x) = 0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\xi(x)}, & f_\xi(x) \neq 0. \end{cases} \tag{11.13}$$

Условной плотностью $f(x/\eta = y)$ распределения ξ при условии, что $\eta = y$, называется:

$$f(x/\eta = y) = \begin{cases} 0, & f_\eta(y) = 0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\eta(y)}, & f_\eta(y) \neq 0. \end{cases} \tag{11.14}$$

Определение 11.9. ***Условным математическим ожиданием*** *η при условии, что $\xi = x$, называется:*

$$M(\eta/\xi = x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yf(y/\xi = x)dy. \tag{11.15}$$

Условным математическим ожиданием ξ при условии, что $\eta = y$, называется:

$$M(\xi/\eta = y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x/\eta = y)dx. \tag{11.16}$$

Теорема 11.14. *Для независимости непрерывных случайных величин ξ и η необходимо и достаточно, чтобы $f(x;y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$.*

Для независимых непрерывных случайных величин ξ и η

$$f(y/\xi = x) = f_\eta(y) \text{ и } f(x/\eta = y) = f_\xi(x) \text{ при } f_\xi(x) \neq 0,\ f_\eta(y) \neq 0.$$

Т.е. закон распределения каждой из них не зависит от значений, принимаемых другой.

$$f(y/\xi = x) = \frac{f(x;y)}{f_\xi(x)} = \frac{f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)}{f_\xi(x)} = f_\eta(y).$$

Пример 11.5. *Функция распределения $F(x,\,y)$ двумерной случайной величины (ξ,η) в области $D:\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2$ принимает значения* $\cos x \cdot \cos y$.

Найти вероятность попадания случайной величины (ξ,η) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \pi/4, x = \pi/2, y = 0, y = \pi/4$.

◀ Используем формулу (11.10):

$P(x_1 < \xi < x_2,\ y_1 < \eta < y_2) =$

$= (F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1)) - (F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1)).$

Положив $x_1 = \pi/4,\ x_2 = \pi/2,\ y_1 = 0,\ y_2 = \pi/4$, получим

$P = (\cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos 0) - (\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos 0) =$

$= \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0{,}207.$▶

Ответ: $\approx 0{,}207$.

Пример 11.6. *Задана функция распределения двумерной случайной величины*

$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by}) \text{ , при } x > 0,\ y > 0, \\ 0 \text{ , в противном случае.} \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности (ξ,η).

◀ Согласно (11.11), плотность вероятности есть вторая смешанная частная производная функции распределения. Производная по y отличной от нуля части равна:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = b(1 - e^{-ax})e^{-by}.$$

Дифференцируя это выражение по x, получим

$$f(x;y) = \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y} = abe^{-ax-by}$$

при $x > 0,\ y > 0$ и, кроме того, $f(x,y) = 0$ при $x < 0$ или $y < 0$.▶

Ответ: $f(x,y)=\begin{cases} abe^{-ax-by} \text{ при } x>0,\ y>0,\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$

Пример 11.7. *Задана двумерная плотность вероятности системы двух случайных величин:* $f(x,y)=(1/2)\cos(x+y)$ *в квадрате* $G:-\pi/4\leqslant x\leqslant\pi/4,\ -\pi/4\leqslant y\leqslant\pi/4$*; вне этого квадрата* $f(x,y)=0$*. Найти функцию распределения случайной величины* (ξ,η)*.*

◀ Для решения задачи воспользуемся формулой:

$$F(x,y)=\int\limits_{-\pi/4}^{x}\int\limits_{-\pi/4}^{y} f(x,y)dxdy.$$

Тогда: а) если $(x;\,y)\in G$

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/4}^{x}dx\int\limits_{-\pi/4}^{y}\cos(x+y)dy=\frac{1}{2}(\cos(x-\pi/4)+\cos(y-\pi/4)-$$

$-\cos(x+y))$.

б) при $x<-\dfrac{\pi}{4}$ или $y<-\dfrac{\pi}{4}$

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}dx\int\limits_{-\infty}^{y}0dy=0.$$

в) при $x>\dfrac{\pi}{4}$, $-\dfrac{\pi}{4}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{4}$

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}dx\int_{-\pi/4}^{y}\cos(x+y)dy=\frac{1}{2}(1+\cos(y-\pi/4)-\cos(y+\pi/4)).$$

г) при $-\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$, $y>\dfrac{\pi}{4}$

$$F(x,y)=\frac{1}{2}(1+\cos(x-\pi/4)-\cos(x+\pi/4)).$$

д) при $x>\dfrac{\pi}{4}$ и $y>\dfrac{\pi}{4}$ $F(x,y)=1$.

Получили

$$F(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\cos(x-\dfrac{\pi}{4})+\cos(y-\dfrac{\pi}{4})-\cos(x+y)),\ \text{если}\ (x;\,y)\in G,\\ 0,\ \text{если}\ x<-\dfrac{\pi}{4}\ \text{или}\ y<-\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{1}{2}(1+\cos(y-\dfrac{\pi}{4})-\cos(y+\dfrac{\pi}{4})),\text{если}\,x>\dfrac{\pi}{4},-\dfrac{\pi}{4}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{1}{2}(1+\cos(x-\dfrac{\pi}{4})-\cos(x+\dfrac{\pi}{4})),\text{если}-\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4},y>\dfrac{\pi}{4},\\ 1,\text{если}\ x>\dfrac{\pi}{4},y>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

▶

Пример 11.8. *Задана двумерная плотность вероятности $f(x,y)=a/(x^2+y^2+2)^4$ системы двух случайных величин (ξ,η). Найти постоянную a.*

◀Воспользуемся свойством 5 плотности вероятности:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1.$$

Для вычисления интегралов удобнее перейти к полярным координатам. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{(x^2+y^2+2)^4}dxdy=a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}\frac{1}{(r^2+2)^4}rdr=1.$$

После вычисления независимых интегралов по φ и r получим: $\pi a/24=1\ \Rightarrow\ a=24/\pi\approx 7{,}639.$▶

Ответ: $a=24/\pi\approx 7{,}639$.

Пример 11.9. *Система случайных величин (ξ,η) имеет плотность вероятности $f(x,y)=a/((1+x^2)(4+y^2))$. Определить коэффициент a; найти функцию распределения $F(x,y)$; вычислить вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в прямоугольник $G:x\in[0,1],\ y\in 0,2]$; установить, являются ли величины ξ и η зависимыми.*

◀Коэффициент a найдем также с помощью свойства 5 плотности:

$$a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{4+y^2}=1,\quad a\cdot\left(\operatorname{arctg}x\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\cdot\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1,$$

$$a\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=1,\quad a\cdot\frac{\pi^2}{2}=1,\quad a=\frac{2}{\pi^2}.$$

Таким образом,

$$f(x,y)=\frac{2}{\pi^2(1+x^2)(4+y^2)}.$$

Согласно свойству 3 двумерной плотности, функция распределения

$$F(x,y)=\frac{2}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dy}{4+y^2}=\frac{2}{\pi^2}\cdot\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Вероятность попадания в прямоугольник G определим с помощью найденной функции распределения:

$$P((\xi,\eta)\in G)=F\,(1,2)-F\,(0,2)-(F\,(1,0)-F(0,0))=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\Bigg(\left(\operatorname{arctg}1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1+\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-\left(\left(\operatorname{arctg}1+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{4}\right)\Bigg)=\frac{1}{16}.$$

Заметим, что эту же вероятность можно непосредственно найти с помощью плотности распределения согласно её свойству 4.

Плотности распределения составляющих найдем по формулам (11.12):

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{2}{\pi^2(1+x^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{4+y^2}=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Аналогично найдем, что

$$f_\eta(y)=\frac{2}{\pi(4+y^2)}.$$

Поскольку здесь $f(x,y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$, то делаем вывод о том, что случайные величины ξ и η независимы. ▶

Пример 11.10. *Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины $\xi\,\eta$ равна:* $f(x;y)=\begin{cases} a(x^2+xy), (x;y)\in D, \\ 0, (x;y)\notin D, \end{cases}$ *где* $D:\ 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2$. *Вычислить значение постоянной a, плотность распределения компонент случайной величины $\xi\,\eta$, математические ожидания составляющих и корреляционный момент.*

◀Постоянную a найдем из условия

$$\int\limits_0^2\int\limits_0^2 f(x,y)dxdy=1.$$

Тогда

$$a\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^2 (x^2+xy)dy=1.$$

Находим интеграл:

$$a\int\limits_0^2\left(x^2y+\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_0^2 dx=a\int\limits_0^2\left(2x^2+2x\right)dx=a\left(\frac{2x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^2=$$
$$=a\left(\frac{16}{3}+4\right)=\frac{28a}{3}.$$

Получили уравнение:$a\cdot 28/3=1$. Отсюда получим значение $a=3/28$.

Таким образом, отличное от нуля значение плотности распределения будет

$$f(x;y)=\begin{cases} \dfrac{3}{28}(x^2+xy), & \text{если } (x;\,y)\in\ D, \\ 0, & \text{если } (x;\,y)\notin\ D. \end{cases}$$

Математические ожидания случайных величин ξ и η определятся как

$$M(\xi)=\int\limits_0^2\int\limits_0^2 xf(x,y)dxdy=\frac{3}{28}\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^2(x^2+xy)dy=\frac{10}{7},$$

$$M(\eta)=\int\limits_0^2\int\limits_0^2 yf(x,y)dxdy=\frac{3}{28}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^2 y(x^2+xy)dy=\frac{8}{7}.$$

Найдём плотность распределения компонент случайной величины $\xi\,\eta$.

При $x\in[0;2]$

$$f_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x;y)dy=\frac{3}{28}\int\limits_0^2(x^2+xy)dy=\frac{3}{28}\left(x^2y+x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{14}(x^2+x).$$

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\notin[0;2],\\ \dfrac{3}{14}(x^2+x), & \text{если } x\in[0;2].\end{cases}$$

При $y\in[0;2]$

$$f_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x;y)dx=\frac{3}{28}\int\limits_0^2(x^2+xy)dx=\frac{3}{28}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{2}\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{28}\left(\frac{8}{3}+2y\right).$$

$$f_\eta(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\notin[0;2],\\ \dfrac{3}{28}\left(\dfrac{8}{3}+2y\right), & \text{если } y\in[0;2].\end{cases}$$

Проверяем выполнения основных свойств функции плотности: 1) $f(x)\geqslant 0$ и 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$. Первое свойство для обеих функций выполняется, т.к. на отрезке $[0;2]$ они неотрицательны, а вне его равны нулю.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx=\int\limits_0^2\frac{3}{14}(x^2+x)dx=\frac{3}{14}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{14}\left(\frac{8}{3}+2\right)=1.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\eta(y)dy=\int\limits_0^2\frac{3}{28}\left(\frac{8}{3}+2y\right)dy=\frac{3}{28}\left(\frac{8}{3}y+y^2\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{28}\left(\frac{16}{3}+4\right)=1.$$

Осталось найти корреляционный момент.

$$K_{\xi\,\eta}=M(\xi\,\eta)-M(\xi)M(\eta)$$

$$M(\xi\,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x;y)dxdy = \frac{3}{28}\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{2}(x^2+xy)dxdy =$$
$$= \frac{3}{28}\int\limits_{0}^{2}\left(x^2y + x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 dx = \frac{3}{28}\int\limits_{0}^{2}\left(2x^2+2x\right)dx =$$
$$= \frac{3}{28}\left(\frac{2x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{3}{28}\left(\frac{16}{3}+4\right) = 1.$$

$K_{\xi\,\eta} = M(\xi\,\eta) - M(\xi)M(\eta) = 1 - \dfrac{10}{7}\cdot\dfrac{10}{7} = -\dfrac{31}{49}$. ▶

Пример 11.11. *Дана плотность двумерной случайной величины*

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln^2 4\cdot 4^{-x-y} \text{ при } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 \text{ при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

◀В данном случае

$$M(\xi) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x\cdot f(x,y)dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x\cdot\ln^2 4\cdot 4^{-x-y}dxdy =$$

$$= \ln 4\int_0^{\infty} x\cdot 4^{-x}dx = \frac{1}{\ln 4}.$$

Здесь последний интеграл по x был вычислен по частям. Аналогично найдем

$$M(\eta) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y\cdot f(x,y)dxdy = \frac{1}{\ln 4}.$$

Дисперсия

$$D(\xi) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^2\cdot f(x,y)dxdy - M^2(\xi).$$

Подставляя сюда значение плотности вероятности и проводя два раза интегрирование по частям, получим:
$D(\xi) = 1/\ln^2 4$. Очевидно, $D(\eta) = 1/\ln^2 4$. ▶

Задания для самостоятельной работы

11.1. Задана дискретная двумерная случайная величина (ξ, η):

$\xi \backslash \eta$	9	11	12	15
2	0,01	0,08	0,21	0,12
4	0,07	0,15	0,23	0,04

Найти математические ожидания $M(\xi)$, $M(\eta)$.

11.2. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 + 5^{-x-y} \text{ при } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 \text{ при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ y_1 = 1,\ y_2 = 2$.

11.3. Дана функция распределения системы двух случайных величин

$$F(x,y) = k(1 - e^{-x^2})(1 - e^{-y^2}), (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0);$$

Вне первой четверти $F(x,y)$ равняется нулю. Найти выражение для плотности вероятности и коэффициент k. Определить вероятность попадания случайной точки в область D, которая представляет собой четверть круга радиуса R $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$.

11.4. Двумерная случайная величина (ξ, η) имеет плотность

$$f(x,y) = \frac{a}{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}.$$

Найти коэффициент a и одномерные плотности случайных величин ξ и η.

11.5. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины имеет следующий вид:

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x+y) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x, \\ 0 \text{ вне указанной области.} \end{cases}$$

Определить константу a и вычислить центр распределения.

11.6. Дана плотность вероятности двумерной случайной величины (ξ, η):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin(x+y), \quad x \in [0, \dfrac{\pi}{2}],\ y \in [0, \dfrac{\pi}{2}], \\ 0 \text{ вне этой области.} \end{cases}$$

Определить функцию распределения системы и математические ожидания величин ξ и η.

11.7. Двумерная случайная величина распределена равномерно внутри квадрата со стороной a и диагоналями, совпадающими с осями координат. Найти выражение для плотности вероятности $f(\xi, \eta)$.

Домашнее задание.

Выполнить задание 1.15 и 1.16 типового расчёта.