10. Нормальное распределение

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Определение 10.1. *Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, если её плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (10.1)$$

Этот факт записывать так: $\xi \sim N(a;\sigma)$.

Нормальное распределение определяется двумя параметрами a и σ.

Функции распределения нормального закона выражается через функцию Лапласа $\Phi(x)$ (10.3):

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (10.2)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (10.3)$$

Для случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение, параметры a и σ имеют простой вероятностный смысл:

$$M(\xi) = a; \quad D(\xi) = \sigma^2; \quad \sigma(\xi) = \sigma. \qquad (10.4)$$

Формула для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в заданный интервал:

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)\right) -$$

$$-\left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right),$$

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \qquad (10.5)$$

Вероятность отклонения случайной величины от математического ожидания

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (10.6)$$

В Maxima значения функции плотности распределения (10.1) и функции распределения (10.2) для нормального закона вычисляются при помощи встроенных в пакет функций pdf_normal(x, a, σ) и cdf_normal(x, a, σ).

Пример 10.1. *Написать функцию плотности вероятности нормально распределённой случайной величины ξ, зная, что $M(\xi) = 4$, $D(\xi) = 25$ и построить её график.*

◀Так как математическое ожидание $a = 4$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{25} = 5$, то по формуле (10.1) получаем плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-(x-4)^2/50}.$$

На рис. 37 представлен график функции плотности заданной НСВ ξ. График функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$, максимальное значение функция достигает в точке $x = a$ и примерно равно $\dfrac{0{,}4}{\sigma} = 0{,}08$. При любых значениях параметров a и σ по оси абсцисс график следует изображать в диапазоне $[a-3\sigma; a+3\sigma]$, вне этого отрезка значение функции близко к нулю.▶

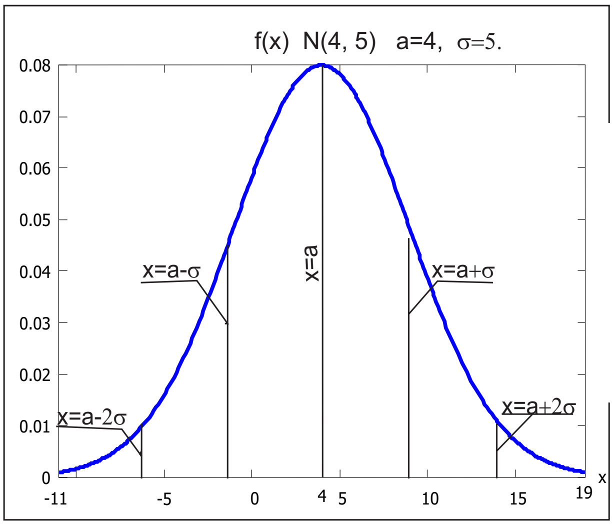

Рис. 37. *К примеру 10.1*

Пример 10.2. *Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения вероятностей с параметрами $a = 0, \sigma = 1$. Определить: а) $P(-2 < \xi < 3)$, б) $P(\xi < 1)$, в) $P(\xi > 3)$. Привести геометрическую иллюстрацию полученного решения.*

◀а) Применим формулу (10.5), полагая $a = 0,\ \sigma = 1$,
$x_1 = -2,\ x_2 = 3$. Тогда

$$P(-2 < \xi < 3) = \Phi\left(\frac{3-0}{1}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0}{1}\right) = \Phi(3) - \Phi(-2) =$$
$$= \Phi(3) + \Phi(2) \approx 0{,}499 + 0{,}477 = 0{,}976.$$

Значения $\Phi(3)$ и $\Phi(2)$ найдены из таблицы, $\Phi(-2) = -\Phi(2)$.▶

◀ б) $P(\xi < 1) = P(-\infty < \xi < 1) = \Phi\left(\dfrac{1-0}{1}\right) - \Phi\left(\dfrac{-\infty-0}{1}\right) =$
$= \Phi(1) + \Phi(+\infty) \approx 0{,}3413 + 0{,}500 = 0{,}841.$

в) $P(\xi > 3) = P(3 < \xi < +\infty) = \Phi\left(\dfrac{\infty-0}{1}\right) - \Phi\left(\dfrac{3-0}{1}\right) =$
$= \Phi(+\infty) - \Phi(3) \approx 0{,}500 - 0{,}499 = 0{,}001.$

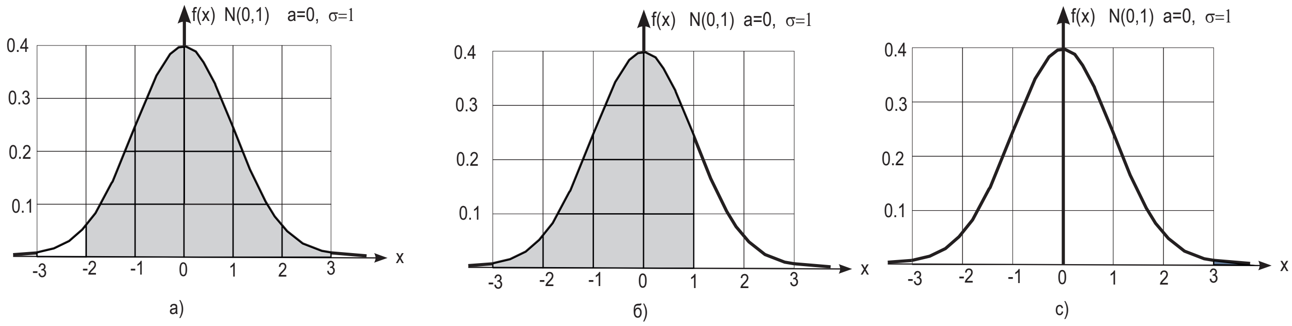

Рис. 38. *К примеру 10.2*

На рис. 38 приведена геометрическая иллюстрация полученного решения.▶

Ответ: $P(-2 < \xi < 3) \approx 0{,}976$; $P(\xi < 1) \approx 0{,}841$;
$P(\xi > 3) \approx 0{,}001$.

Пример 10.3. *Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 3,\ \sigma = 2$.*
Найти: а) $P(|\xi - 3| < 2{,}5)$, б) $P(|\xi - 3| < 0{,}1)$, в) $P(|\xi - 2| < 2)$. Привести геометрическую иллюстрацию полученного решения.

◀а) Так как $a = 3$, то для нахождения вероятности неравенства $|\xi - 3| < 2{,}5$, применим формулу (10.6), где $\varepsilon = 2{,}5$.

$P(|\xi - 3| < 2{,}5) = 2\Phi\left(\dfrac{2{,}5}{2}\right) = 2\Phi(1{,}25) = 2 \cdot 0{,}3944 = 0{,}7888.$

б) Применяем эту же формулу:

$$P(|\xi - 3| < 0{,}1) = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{2}\right) = 2\Phi(0{,}05) \approx 2 \cdot 0{,}0199 = 0{,}0398.$$

в)В этом случае формулу (10.6) применять нельзя. Применяем общую формулу (10.5).

$P(|\xi - 2| < 2) = P(0 < \xi < 4) = \Phi\left(\dfrac{4-3}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{0-3}{2}\right) =$
$= \Phi(0{,}5) - \Phi(-1{,}5) \approx 0{,}1915 + 0{,}4332 = 0{,}6247.$▶

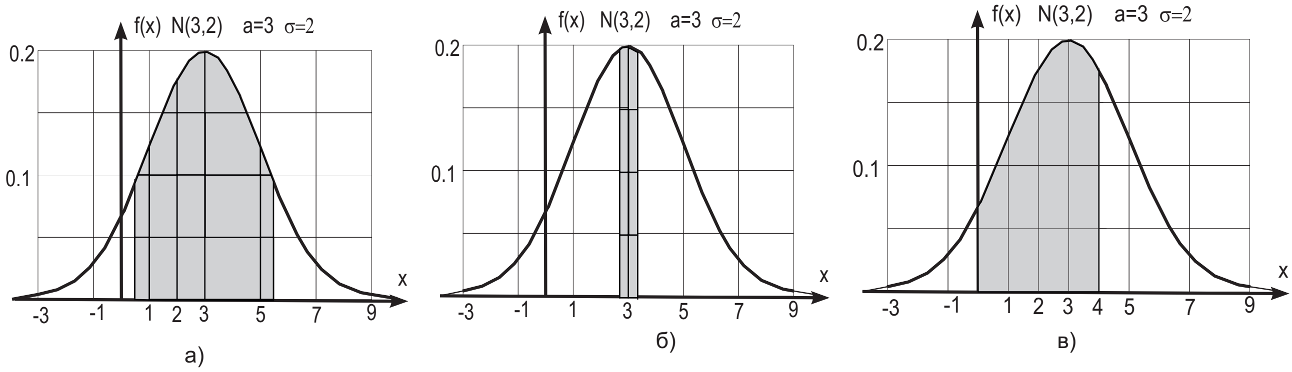

Рис. 39. *К примеру 10.3*

На рис. 39 приведена геометрическая иллюстрация полученного решения.▶

Ответ: $P(2 < \xi < 3) \approx 0{,}192$; $P(|\xi - 3| < 0{,}1) \approx 0{,}04$; $P(|\xi - 2| < 2) \approx 0{,}625$.

Пример 10.4. *Вычислить вероятность того, что случайная величина* ξ, *подчинённая нормальному закону, при трёх испытаниях хотя бы один раз окажется в интервале (4; 6), если* $M(\xi) = 3{,}8$, $\sigma(\xi) = 0{,}6$.

◀Сначала найдем вероятность того, что случайная величина ξ будет заключена в интервале (4; 6):

$$P(4 < \xi < 6) = \Phi\left(\frac{6 - 3{,}8}{0{,}6}\right) - \Phi\left(\frac{4 - 3{,}8}{0{,}6}\right) =$$

$$= \Phi(3{,}67) - \Phi(0{,}33) \approx 0{,}500 - 0{,}129 = 0{,}371.$$

Тогда вероятность попадания вне интервала (4; 6) будет равна $1 - 0{,}371 = 0{,}629$. Вероятность того, что случайная величина ξ при трёх испытаниях все три раза окажется вне интервала (4; 6), найдется по теореме умножения независимых событий как $0{,}6294^3 \approx 0{,}2489$. Следовательно, искомая вероятность $p = 1 - 0{,}249 = 0{,}751$.▶

Ответ: $\approx 0{,}751$.

Пример 10.5. *Длина изготовляемых болтов является нормально распределённой случайной величиной* ξ *с математическим ожиданием* $a = 8$. *Вероятность того, что наудачу взятый болт имеет размер от* 7,6 *до* 7,8, *равна* 0,3. *Чему равна вероятность того, что размер наудачу взятого болта будет в пределах от* 8,2 *до 8,4 см?*

◀Поскольку кривая плотности нормального распределения симметрична относительно математического ожидания a, при этом интервалы $(7{,}6; 7{,}8)$ и $(8{,}2; 8{,}4)$, также симметричны относительно прямой $x = 8$, рис. 10.5, то

$P(7{,}6 < \xi < 7{,}8) = P(8{,}2 < \xi < 8{,}4) = 0{,}3$. ▶

Ответ: 0,3.

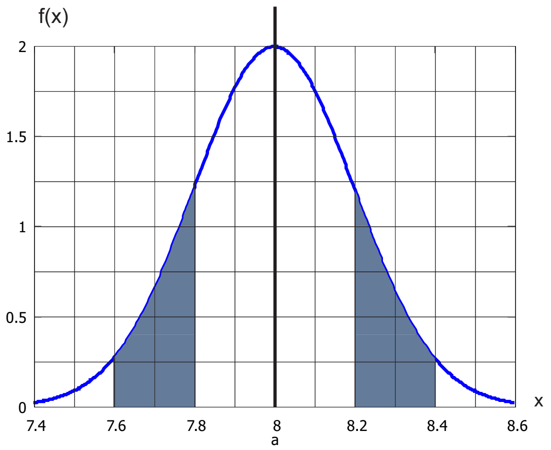

Рис. 40. *Для примера 10.5*

Пример 10.6. *Длина детали представляет собой случайную величину ξ, распределённую по нормальному закону и имеющую поле допуска от 78 до 84 см. Известно, что брак по заниженному размеру (длина деталей меньше 78 см) составляет 4%, а брак по завышенному размеру (длина деталей больше 84 см) 6%. Найти средний размер детали a и среднее квадратическое отклонение σ.*

◀Поле допуска находится от 78 до a и от a до 84. Вероятность попадания в первый интервал $0{,}5-0{,}04=0{,}46$, а во второй: $0{,}5-0{,}06=0{,}44$. Поскольку

$$P(78<\xi<a)=\Phi(0)-\Phi\left(\frac{78-a}{\sigma}\right)=0{,}46,$$

$$P(a<\xi<84)=\Phi\left(\frac{84-a}{\sigma}\right)-\Phi(0)=0{,}44$$

и функция Лапласа $\Phi(0)=0$, то

$$\begin{cases}\Phi\Big(\dfrac{78-a}{\sigma}\Big)=-0{,}46,\\ \Phi\Big(\dfrac{84-a}{\sigma}\Big)=0{,}44.\end{cases}$$

Из таблицы приложения 2, найдем:

$$\begin{cases}\dfrac{78-a}{\sigma}=-1{,}75,\\ \dfrac{84-a}{\sigma}=1,55.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6=3{,}3\sigma,\\ a=78+1{,}75\sigma,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma=1{,}818,\\ a=81{,}182.\end{cases}$$ ▶

Пример 10.7. *Диаметр подшипников, выпускаемых заводом, представляет собой случайную величину ξ, распределённую по нормальному закону с $a = 15$ мм и $\sigma = 0{,}4$ мм. Найти вероятность брака P при условии, что разрешается допуск для диаметра подшипника $\pm 0{,}8$ мм. Какую точность диаметра подшипника можно гарантировать с вероятностью 0,92?*

◀Так как здесь отклонение $\varepsilon = 0{,}8$, то, согласно (10.6),

$$P(|\xi - 15| < 0{,}8) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0{,}8}{0{,}4}\right) = 2 \cdot \Phi(2) \approx 2 \cdot 0{,}477 = 0{,}954.$$

Отсюда вероятность брака найдется как вероятность противоположного события: $P = 1 - 0{,}954 = 0{,}046$.

Во второй части задачи, наоборот, задана вероятность $P(|\xi - a| < \varepsilon)$ и нужно найти отклонение ε. Подставим известные данные в формулу (10.6). Тогда $0{,}92 = 2 \cdot \Phi(\varepsilon/0{,}4)$, $\Phi(\varepsilon/0{,}4) = 0{,}46$. Из таблицы найдем, что $\varepsilon/0{,}4 = 1{,}75$ или $\varepsilon = 0{,}7$ мм.▶

Ответ: $P \approx 0{,}05$, $\varepsilon = 0{,}7$.

Пример 10.8. *Размер диаметра втулок считается нормально распределённым с* $a = 2{,}5$ *см и* $\sigma = 0{,}01$ *см. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки* ξ, *если за вероятность практической достоверности принимается* 0,9973*?*

◀Согласно правилу «3σ» (трёх сигм):

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 0{,}9973.$$

Отсюда получим: $|\xi - a| < 3\sigma,\ a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma$,
$2,5 - 0{,}03 < \xi < 2,5 + 0{,}03$ или $2{,}47 < \xi < 2{,}53$.▶

Ответ: $\xi \in (2{,}47; 2{,}53)$.

Пример 10.9. *Срок безотказной работы прибора является случайной величиной, распределённой по нормальному закону. Найти среднее время T срока безотказной работы прибора, если с вероятностью 0,975 прибор безотказно работает более 400ч, а среднее квадратическое отклонение 8ч.*

◄ Применяем формулу (10.5):
$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = \Phi\Big(\dfrac{x_2 - a}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\dfrac{x_1 - a}{\sigma}\Big).$

Здесь ξ — срок безотказной работы прибора, a — искомая величина обозначающая среднее время T безотказной работы прибора,
$\sigma = 8$ — среднее квадратическое отклонение безотказной работы прибора, $x_1 = 400$, $x_2 = +\infty$ — границы интервала на котором вероятность равна 0,975.

Получаем,

$$P(\xi > 400) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{400 - a}{8}\right) \Rightarrow 0{,}5 - \Phi\left(\frac{400 - a}{8}\right) = 0{,}975 \Rightarrow$$
$$\Phi\left(\frac{400 - a}{8}\right) = 0{,}5 - 0{,}975 = -0{,}475.$$

Из таблицы приложение 2, находим при каком значении аргумента значение функции равно 0,475.

Получаем линейное уравнение
$$\frac{400 - a}{8} = -1{,}96 \ \Rightarrow\ 400 - a = -15{,}68 \ \Rightarrow\ a = 415{,}68.$$

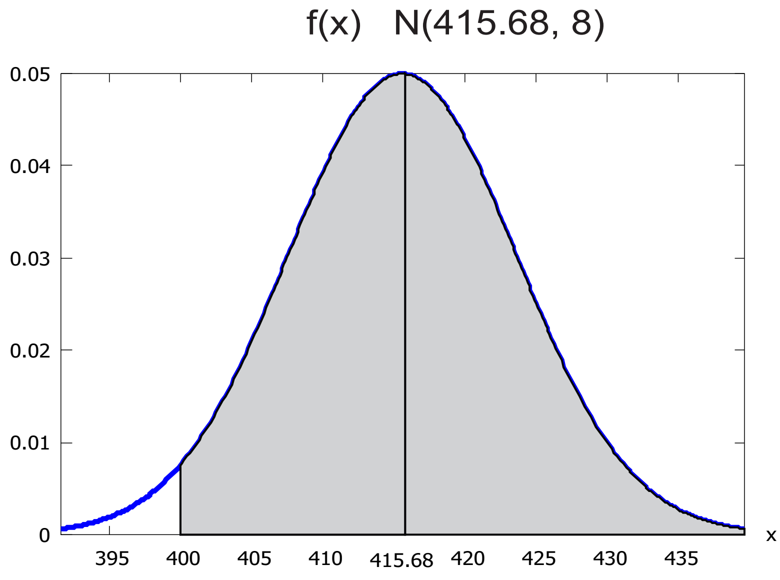

Рис. 41. *К примеру 10.9*

На рис. 41 Представлена иллюстрация полученного решения. Площадь выделенной области равна 0,975. ►

Ответ: $\approx 415{,}68$.

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Для непрерывной случайной величины ξ

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \tag{10.7}$$

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M^2(\xi). \tag{10.8}$$

Замечание 10.1. *Если $\eta = \varphi(\xi)$ — непрерывная функция случайного аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то*

$$M(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx, \tag{10.9}$$

где $f(x)$ – плотность распределения ξ.

$$D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x)\, dx - M^2(\varphi(\xi)). \tag{10.10}$$

Замечание 10.2. *Если ξ — непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$, и если $y = \varphi(x)$ — дифференцируемая монотонно возрастающая или монотонно убывающая функция, обратная функция которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины η определяется равенством*

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|. \tag{10.11}$$

Пример 10.10. *Непрерывная случайная величина ξ задана функцией плотности распределения $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 8e^{-8x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$ Найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, плотность распределения непрерывной случайной величины $\eta = e^{3\xi}$, $M(\eta)$ и $D(\eta)$. Числовые характеристики случайной величины найти двумя способами.*

◀ По формуле (10.7) найдём $M(\xi)$

$$M(\xi) = \int\limits_0^{+\infty} x \cdot 8e^{-8x}dx = -\int\limits_0^{+\infty} xde^{-8x} = -xe^{-8x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-8x}dx =$$

$$= -\frac{1}{8e^{8x}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{8}.$$

Отметим, что случайная величина ξ описывает показательное распределение и для него $M(\xi) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{8}$.

По формуле (10.9) найдём $M(\eta)$

$M(\eta) = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{3x} \cdot 8e^{-8x}dx = 8\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5x}dx = -\dfrac{8}{5}e^{-5x}\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{8}{5}$.

Найдём теперь функция плотности случайной величины η. Т.к. функция $y = e^{3x}$ монотонно возрастающая при $x > 0$, то для определения функции плотности случайной величины η можно применить формулу (10.11). Найдём функцию $\psi(y)$ обратную функция $y = e^{3x}$. Для этого логарифмируем эту функцию.

$$\ln(y) = \ln\left(e^{3x}\right) \Rightarrow \ln(y) = 3x \Rightarrow x = \frac{\ln y}{3}.$$

Отметим, что при $x = 0 \quad y = 1$, а при $x = +\infty \quad y + \infty$.

Таким образом, $\psi(y) = \dfrac{\ln y}{3}. \Rightarrow \psi'(y) = \dfrac{1}{3y}$.

Функцию плотности случайной величины η найдём по формуле (10.11) $g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|$

$$g(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \dfrac{8}{3y}e^{-8\frac{\ln y}{3}}, & y \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \dfrac{8}{3y}\left(e^{\ln y}\right)^{(-8/3)}, & y \geqslant 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \dfrac{8}{3y}y^{-8/3}, & y \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \dfrac{8}{3}y^{-11/3}, & y \geqslant 1. \end{cases}$$

Проверим выполняется ли условие нормировки полученной функции плотности

$$\int_1^{+\infty} \frac{8}{3} y^{-11/3} dy = \frac{8}{3} \cdot \frac{y^{-8/3}}{-8/3}\Big|_1^{+\infty} = 1.$$

Используя формулу (10.7)вычислим математическое ожидание данной случайной величины η

$$M(\eta) = \int_1^{+\infty} y \frac{8}{3} y^{-11/3} dy = \frac{8}{3} \int_1^{+\infty} y^{-8/3} dy = \frac{8}{3} \frac{y^{-5/3}}{(-5/3)}\Big|_1^{+\infty} =$$

$$= -\frac{8}{5y^{2/3}}\Big|_1^{+\infty} = \frac{8}{5}.$$

Получили такое же значение как и по формуле (10.9).

Найдём теперь дисперсию случайной величины η по двум формулам.

1) По формуле $D(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta)$:

$$D(\eta) = \int_1^{+\infty} y^2 \frac{8}{3} y^{-11/3} dy - M^2(\eta) = \frac{8}{3} \int_1^{+\infty} y^{-5/3} dy - \frac{64}{25} =$$

$$= \frac{8}{3} \frac{y^{-2/3}}{(-2/3)}\Big|_1^{+\infty} - \frac{64}{25} = 4 - \frac{64}{25} = \frac{36}{25}.$$

2) По формуле $D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x)\, dx - M^2(\varphi(\xi))$:

$$D(\eta) = \int_0^{+\infty} \left(e^{3x}\right)^2 8e^{-8x} dx - M^2(\eta) = 8 \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx - \left(\frac{5}{8}\right)^2 =$$

$$= -\frac{8}{2e^{2x}}\Big|_0^{+\infty} - \frac{25}{64} = 4 - \frac{64}{25} = \frac{36}{25}.$$

По обеим формулам получили одинаковые результаты.▶

▶В примере 10.10 условие монотонности функции $\varphi(\xi)$ выполнялось на всей области определения. Рассмотрим теперь пример в котором функция кусочно монотонна. В этом случае вместо формулы (10.12) применяется более общая формула

$$g(y) = \sum_{k=1}^{m} f[\psi_k(y)] \cdot |\psi_k'(y)|. \tag{10.12}$$

где m — число интервалов монотонности, $x = \psi_k(y)$ — уравнение обратной функции $y = \varphi(\xi)$ на k-том интервале монотонности этой функции.▶

Пример 10.11. *Непрерывная случайная величина* ξ *задана функцией плотности распределения* $f(x) = \left\{ [\begin{array}{ll} 0, & x \notin [0;\pi/2], \\ \cos x, & x \in [0;\pi/2]. \end{array} \right.$ *Найти плотность распределения непрерывной случайной величины* $\eta = |\xi - \pi/6|$ *и построить её график.*

◀ На рис. 42 приведен график функции преобразования, в координатах (x, y), случайной величины ξ к величине η.

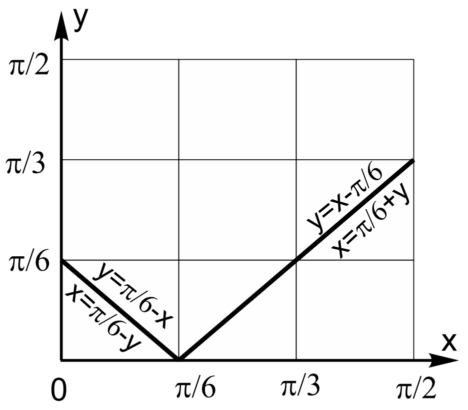

Рис. 42. $\eta(\xi)$

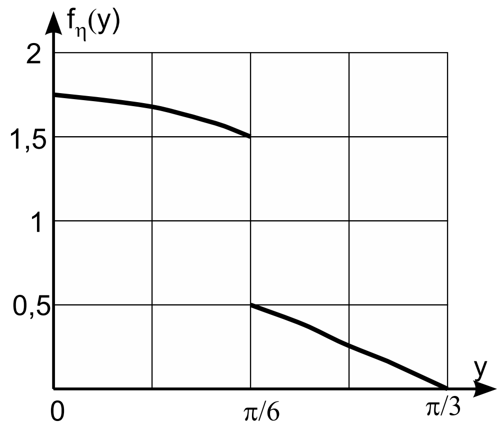

Рис. 43. $f_\eta(y)$

Рисунки для примера 10.11

$$y = \begin{cases} 0, & x \notin [0;\pi/2], \\ \pi/6 - x, & x \in [0;\pi/6], \\ x - \pi/6, & x \in [\pi/6;\ \pi/2]. \end{cases}$$

Получим обратную функцию $x = \psi(y)$.

$$x = \psi(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty;0) \bigcup ((\pi/3;\infty), \\ \pi/6 - y, & x \in [0;\pi/6] \bigcap y \in [0;\pi/6], \\ \pi/6 + y, & x \in [\pi/6;\pi/2] \bigcap y \in [0;\pi/3]. \end{cases}$$

Модуль производной этой функции равен

$$|\psi'(y)| = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty;0) \bigcup ((\pi/3;\infty), \\ 1, & y \in [0;\pi/3]. \end{cases}$$

Функция $x = \psi(y)$ на отрезке $y \in [0;\pi/6]$ двузначная, поэтому в функции плотности $f_\eta(y)$ этому отрезку соответствует сумма двух слагаемых. Получаем

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty;0) \bigcup ((\pi/3;\infty), \\ \cos(\pi/6 + y) + \cos(\pi/6 - y), & y \in [0;\pi/6], \\ \cos(\pi/6 + y), & y \in [\pi/6;\pi/3]. \end{cases}$$

Отдельно вычислим

$$\cos(\pi/6 + y) + \cos(\pi/6 - y) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi/6 + y + \pi/6 - y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi/6 + y - \pi/6 + y}{2}\right) = \sqrt{3}\cos y.$$

Получаем искомую функцию плотности

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \bigcup ((\pi/3; \infty), \\ \sqrt{3}\cos y, & y \in [0; \pi/6], \\ \cos(\pi/6 + y), & y \in [\pi/6; \pi/3]. \end{cases}$$

Проверим выполняется ли условие нормировки полученной функции плотности $\int\limits_1^{+\infty} f_\eta(y)dy = 1$.

$$\int\limits_0^{\pi/6} \sqrt{3}\cos y\, dy + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{3}\cos(\pi/6 + y)\, dy =$$

$$= \sqrt{3}\sin y\Big|_0^{\pi/6} + \sin(\pi/6 + y)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \sqrt{3}/2 + 1 - \sqrt{3}/2 = 1.$$

На рис. 43, представлен график полученной функции плотности $f_\eta(y)$. ▶

Задания для самостоятельной работы

10.1. Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 1$, $\sigma = 0{,}5$. Определить: а) $P(-1 < \xi < 1)$, б) $P(0 < \xi < 3)$, в) $P(|\xi - 1| < 0{,}1)$.

10.2. Процент выполнения задания (норма выработки) рабочего является случайной величиной, подчинённой нормальному закону распределения с математическим ожиданием 110% и средним квадратическим отклонением 2%. Определить вероятность того, что: а) выполнение нормы выработки одним рабочим окажется в пределах от 101 до 105%, б) выполнение нормы выработки хотя бы одним из трёх наудачу взятых рабочих окажется в пределах от 107 до 111%.

10.3. Размер гайки задан полем допуска 90 – 95 мм. На ОТК завода средний размер детали оказался 92,7 мм, а среднее квадратическое отклонение 1,2 мм. Считая, что размер гайки подчиняется нормальному закону, определить отдельно вероятность брака по: а) заниженному, б) завышенному размерам. (В случае а нужно искать вероятность того, что $\xi < 90$, а в случае б — вероятность того, что $\xi > 95$).

10.4. Длина изготавливаемой на станке детали представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону. Её среднее значение равно 30 см, а $\sigma = 0{,}25$ см. Какую точность длины детали можно гарантировать с вероятностью 0,95?

10.5. Производится взвешивание драгоценного металла без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ мг. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 5 мг.

10.6. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0{,}3$, $\sigma = 0{,}5$. В каких границах должна изменяться величина ξ,

чтобы вероятность неравенства
$|\xi - 0{,}3| < \varepsilon$ была равна 0,9642?

10.7. Наблюдения показали, что внешний диаметр подшипников данного типа является нормально распределённой случайной величиной ξ со средним значением $a = 100$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}001$ мм. В каких границах можно практически гарантировать внешний диаметр подшипника, если за вероятность практической достоверности принять 0,9973.

Домашнее задание.

Выполнить задание 1.13 и 1.17 типового расчёта.