Теория вероятностей и математическая статистика

Практическое занятие 1. Алгебра событий. Комбинаторика

1.1. Алгебра событий

Пример 1.1. *Событие A означает, что хотя бы один из шести проверяемых двигателей неисправен, событие B – все двигатели исправны. Что означают события $A+B, AB$?*

Р е ш е н и е: Здесь событие $\bar{A}$ означает, что все двигатели исправны, т.е. $\bar{A}=B$. Следовательно, A и B представляют собой противоположные события, для которых $A+B=\Omega, AB=\varnothing$.

Пример 1.2. *Пусть событие A – при аварии сработал первый сигнализатор, событие B – сработал второй сигнализатор. Опишите события:*

$$A+B,\ AB,\ A\bar{B},\ \bar{A}\bar{B},\ A\bar{B}+\bar{A}B.$$

Р е ш е н и е: Сумма событий $A+B$ означает, что при аварии сработал либо первый сигнализатор, либо – второй, либо – оба. Событие AB – сработали оба сигнализатора одновременно; $A\bar{B}$ означает, что первый сигнализатор сработал, а второй нет; $\bar{A}\bar{B}$ – не сработали оба сигнализатора. $A\bar{B}+\bar{A}B$ – сработал один сигнализатор, первый или второй.

Пример 1.3. *Доказать, что: а) $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$, б) $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$.*

Р е ш е н и е: а) Событие $\bar{A}\bar{B}$ означает непоявление событий ни A, ни B. Противоположное событие $\overline{\bar{A}\bar{B}}$ состоит в том, что хотя бы одно из событий A или B имеет место, а это и есть сумма событий $A+B$; следовательно $\bar{A}\cdot\bar{B}=\overline{A+B}$.

б) Событие AB состоит в совместном появлении событий A и B; событие $\overline{AB}$ состоит в непоявлении хотя бы одного из этих событий A, B или в появлении хотя бы одного из событий $\bar{A}, \bar{B}$, а это равносильно $\bar{A}+\bar{B}$.

Пример 1.4. *Событие A состоит в том, что хотя бы один из имеющихся десяти цехов не выполняет план; событие B состоит* *в том, что цехов, не выполняющих план, среди них не менее двух. Описать события: а) $\bar{A}$ и $\bar{B}$, б)$A+B$, в)$A\bar{B}$, г)$\bar{A}B$.*

Р е ш е н и е: а) $\bar{A}$ — все цеха выполняют план, $\bar{B}$ — цехов, не выполняющих план, один или нет ни одного; б) так как наступление события B означает также наступление события A, то $A+B=A$; в) один цех не выполняет план; г) $\bar{A}B=V$, т.к. события $\bar{A}$ и B несовместны.

Пример 1.5. *Производится три выстрела по мишени. Событие A — попадание в мишень при первых двух выстрелах (оба попали в цель), событие B — промах при третьем выстреле. Что означают события: $A+B$, AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$, $\bar{A}\bar{B}$?*

Р е ш е н и е: Событие $A+B$ — или произошло попадание при двух выстрелах, или произошёл промах при третьем выстреле, либо то и другое. AB — два первых выстрела попали в мишень, третий — нет. $A\bar{B}$ — произошло попадание при всех трёх выстрелах. $\bar{A}B$ — при всех трёх выстрелах промах. $\bar{A}\bar{B}$ — два первых выстрела промах, третий — попадание.

Пример 1.6. *Из множества супружеских пар наудачу выбирается одна. Событие A — мужу больше 30 лет, событие B — муж старше жены, событие C — жене больше 30 лет. Что означают события: ABC, $A\bar{B}$, $A\bar{B}C$?*

Р е ш е н и е: ABC — оба супруга старше 30 лет, причём муж старше жены. $A\bar{B}$ — мужу больше 30 лет, но он не старше своей жены. $A\bar{B}C$ — оба супруга старше 30 лет, но муж не старше своей жены.

Пример 1.7. *Пусть A, B, C — три произвольных события. Что означают следующие события:*

а) $A+B+C$, б) $AB+AC+BC$, в) ABC, г) $A\bar{B}C$,
д) $A\bar{B}\bar{C}$, е) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, ж) $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$,
з) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$, и) $A+B+C-ABC$?

Р е ш е н и е: а) Произошло по крайней мере одно из трёх событий; б) произошли по крайней мере два события из трёх; в) произошли все три события; г) произошли A и B, а событие C не произошло; д) произошло A, а события B и C не произошли; е) ни одно событие не произошло; ж) произошло только одно событие; з) произошли только два события; и) произошло не более двух событий.

Если рассматривать событие A как попадание в область A, событие $\bar{A}$ как непопадание в область A и ввести аналогичные обозначения для событий B и C, то рассмотренные события можно представить, как попадание в области, заштрихованные на рис. 1

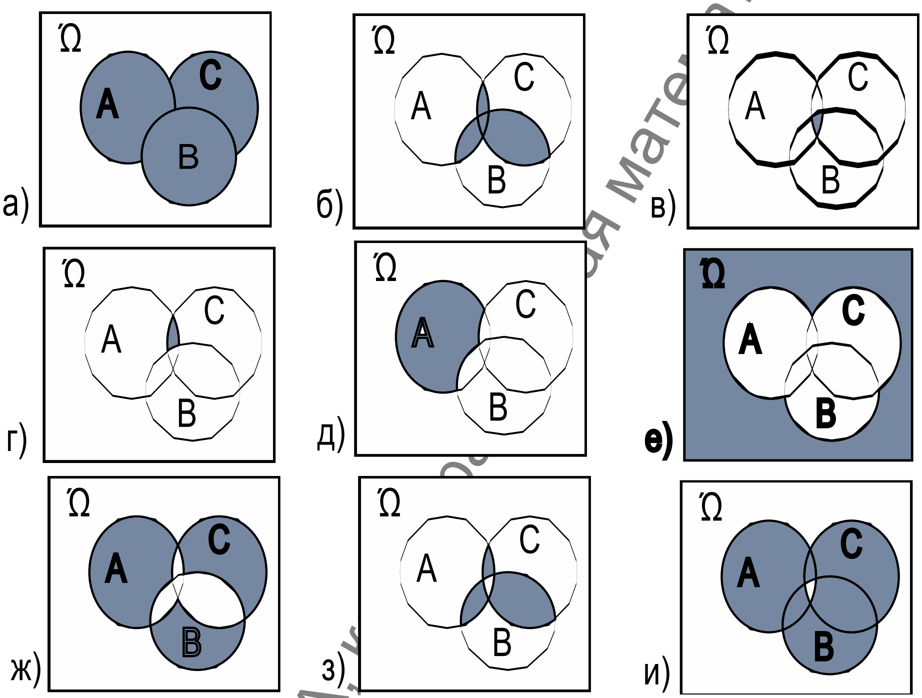

Рис. 1. *Геометрическая иллюстрация операций над событиями*

Пример 1.8. *Доказать, что события* $A, \bar{A}B, \overline{A+B}$ *образуют полную группу попарно несовместных событий.*

Р е ш е н и е. Учитывая, что $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$, будем рассматривать события $A, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$. Их сумма

$$A + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} = A + \bar{A}(B + \bar{B}) = A + \bar{A}\Omega = A + \bar{A} = \Omega,$$

а произведения

$$A \cdot \bar{A}B = (A\bar{A}) \cdot B = \emptyset B = \emptyset, \quad A \cdot \bar{A}\bar{B} = (A\bar{A})\bar{B} = \emptyset\bar{B} = \emptyset,$$

$$\bar{A}B \cdot \bar{A}\bar{B} = (\bar{A}\bar{A})(B\bar{B}) = \bar{A}\emptyset = \emptyset).$$

События с данными свойствами по определению образуют полную группу попарно несовместных событий.

1.2. Относительная частота

Необходимый теоретический материал из лекции 1.

Определение 1.1. *Пусть в N испытаниях событие A появилось M раз. Относительной частотой или просто частотой события A в данной серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу испытаний:*

$$P^*(A) = \frac{M}{N}. \tag{1.1}$$

Определение 1.2. *Условной частотой события A при условии появления B $P^*(A/B) = P^*_B(A)$ называется отношение числа испытаний, в которых появились оба события A и B, к числу испытаний, в которых появилось событие B.*

Если в N испытаниях событие B появилось L раз, а событие A появилось совместно с событием B K раз, то

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L}\ , \tag{1.2}$$

$$P^*(B) = \frac{L}{N}\ , \tag{1.3}$$

$$P^*(AB) = \frac{K}{N}\ . \tag{1.4}$$

Теорема 1.1 (умножения частот)**.** *Относительная частота произведения двух событий равна произведению условной частоты одного из них при условии появления другого на относительную частоту другого события:*

$$P^*(AB) = P^*(B) \cdot P^*(A/B). \tag{1.5}$$

Если сомножителей больше двух, то:

$$\begin{aligned} P^*(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k) = P^*(A_1) \cdot P^*(A_2/A_1) \cdot P^*(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdots \\ \cdots P^*(A_k/A_1 \cdot A_2 \cdots A_{k-1}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Пример 1.9. *Резцом обточено 120 поршней. При проверке оказалось, что только 105 поршней имеют размеры, лежащие в пределах допуска. Найти относительную частоту изготовления годных поршней.*

Р е ш е н и е:

Согласно формуле (1.1), частота изготовления годного поршня равна:

$$P^*(A) = \frac{M}{N} = \frac{105}{120} = \frac{7}{8} \approx 0{,}875.$$

Ответ: $P^*(A) = 7/8 \approx 0{,}875$.

Пример 1.10. *Брошены 100 раз две игральные кости. При этом совпадение числа очков было 15 раз, а шестерка на обеих гранях костей выпала 4 раза. Определить условную частоту выпадения шестерок в случае совпадения числа очков.*

Р е ш е н и е: Обозначим: событие A – появление шестерок на обеих гранях, событие B – совпадение числа очков. Тогда событие A появилось $K = 4$ раза, а событие B произошло $L = 15$ раз. Следовательно, $P^*(A) = \dfrac{6}{100}$ и $P^*(B) = \dfrac{15}{100}$.

Согласно формуле (1.2), условная частота появления двух шестерок равна:

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267.$$

Ответ: $P^*(A/B) = 4/15 \approx 0{,}267$.

Пример 1.11. *Из 300 произведённых изделий 20 обладают дефектом α, причём 5 из них имеют также дефект β. Найти относительную частоту появления изделия с обоими дефектами.*

Р е ш е н и е: Пусть событие A — появление дефекта β, а событие B — дефекта α. Тогда по формуле (1.5) относительная частота произведения этих двух событий определится как

$$P^*(AB) = \frac{20}{300} \cdot \frac{5}{20} = \frac{1}{60} \approx 0{,}017.$$

Ответ: $P^*(AB) = 1/60 \approx 0{,}017$.

1.3. Вычисление вероятностей.

Определение 1.3. *Вероятность события A равна отношению числа (m) благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех исходов данного испытания (n):*

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.7}$$

Решение задач непосредственно по формуле (1.7) часто сводится к определению отдельно числителя и знаменателя.

Пример 1.12. *В партии из 80 деталей 11 нестандартных. Взятые для контроля 5 деталей оказались стандартными. Определить вероятности того, что взятая затем деталь будет: а) стандартной, б) нестандартной.*

Р е ш е н и е: Здесь после первой проверки остались 64 стандартных и 11 нестандартных деталей. Число всех деталей перед второй проверкой $n = 75$. а) Число благоприятствующих исходов - появлений стандартной детали (событие A) $m = 64$. Тогда $P(A) = 64/75 \approx 0{,}853$. б) Число благоприятствующих исходов для этого случая – число появлений нестандартной детали (событие B) $m = 11$ и $P(B) = 11/75 \approx \approx 0{,}147$.

Ответ: $P(A) = 64/75 \approx 0{,}853$; $P(B) = 11/75 \approx 0{,}147$.

Пример 1.13. *Бросаются три игральные кости. Найти вероятности того, что: а) сумма очков на выпавших гранях равна 4, б) на всех гранях выпадает одинаковое число очков, в) на всех гранях выпадает различное число очков.*

Р е ш е н и е: Игральная кость представляет собой куб, на гранях которого нанесены 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Каждый из исходов бросания одной кости может сочетаться с каждым из исходов бросания второй и третьей, поэтому общее число возможных исходов испытания $n = 6^3$.

а) Здесь благоприятствующих событию A – появлению на трёх костях суммы очков, равной 4, будет $m = 3$ исхода: $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$. Тогда

$$P(A) = 3/6^3 = 1/72 \approx 0{,}014.$$

б) В этом случае число благоприятствующих исходов будет равно числу граней, т.е. 6. Следовательно,

$$P(B) = 6/6^3 = 1/36 \approx 0{,}028.$$

в) Число исходов, когда на трёх гранях выпадает различное число очков, равно числу размещений $A_6^3 = 4 \cdot 5 \cdot 6$ и

$$P(C) = 4 \cdot 5 \cdot 6/6^3 = 5/9 \approx 0{,}556.$$

Ответ: $P(A) = 1/72 \approx 0{,}014$; $P(B) = 1/36 \approx 0{,}028$; $P(C) = 5/9 \approx 0{,}556$.

1.4. Элементы комбинаторики

Необходимый теоретический материал из лекции 1.

Для непосредственного подсчёта вероятности появления события на основе классического определения применяются, как правило, формулы комбинаторики (раздела математики, изучающего вопросы о том, сколько различных комбинаций (соединений) можно составить из заданного числа объектов).

Определение 1.4. *Перестановками называются различные способы упорядочивания n различных предметов (пронумерованных карточек) при их расположении слева направо.*

$$P_n = n!. \tag{1.8}$$

Определение 1.5. *Размещениями из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами или порядком их расположения в выборке.*

$$A_n^m = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.9}$$

Размещения обладают следующими свойствами:

$$A_n^n = n! = P_n, \quad A_n^0 = 1, \quad A_n^1 = n. \tag{1.10}$$

Размещения с повторениями вычисляются по формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m. \tag{1.11}$$

Определение 1.6. *Сочетаниями из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами.*

Число сочетаний из n по m определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.12}$$

Сочетания обладают следующими свойствами:

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$,

(2) $C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$,

(3) $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = \left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n\right) = (1+1)^n = 2^n.$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов определяется формулой

$$\overline{C}\,_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \qquad (1.13)$$

Задача о выборе В урне находятся n белых и m чёрных шаров. Из урны случайным образом достали $k+l$ шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно k белых и l чёрных шаров.

$$P(A) = \frac{C_n^k \cdot C_m^l}{C_{n+m}^{k+l}}. \qquad (1.14)$$

Пример 1.14. *В коробке имеются десять букв: А, А, А, В, И, К, М, О, Т, Т. Найти вероятность того, что если наудачу вынимать одну букву за другой, то можно сложить слово АВТОМАТИКА.*

Р е ш е н и е: Число всех исходов равно всевозможным перестановкам из 10 букв, т.е. 10! В числителе формулы для вероятности мы должны учесть, что букву А можно расположить на трёх местах 3! способами, а букву Т – 2! способами. Сочетая каждое расположение букв А с каждым расположением букв Т, найдем:

$$P(A) = 3! \cdot 2!/10! = 1/302400 \approx 0{,}331 \cdot 10^{-5}.$$

Ответ: $P(A) = 1/302400 \approx 0{,}331 \cdot 10^{-5}$.

Пример 1.15. *В цехе из 80 рабочих не выполняют норму выработки 5 человек. По списку случайно отбирается 3 человека. Какова вероятность того, что эти рабочие: а) выполняют норму, б) не выполняют норму?*

Р е ш е н и е: Количество всех возможных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 3 человека из 80, т.е. числу сочетаний C_{80}^3.

а) Благоприятствующими будут те исходы, когда 3 человека отбираются только из тех рабочих, которые выполняют норму, т.е. из $80-5=75$ рабочих; их число равно C_{75}^3. Вероятность данного события A

$$P(A) = \frac{C_{75}^3}{C_{80}^3} = \frac{75!}{3!72!} \cdot \frac{3!77!}{80!} = \frac{73 \cdot 74 \cdot 75}{78 \cdot 79 \cdot 80} = \frac{13505}{16432} \approx 0{,}822.$$

б) Здесь вычислим вероятность того, что трое рабочих выбираются именно из тех пяти, которые не выполняют норму (событие B). Число таких случаев равно C_5^3; тогда

$$P(B) = \frac{C_5^3}{C_{80}^3} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{78 \cdot 79 \cdot 80} = \frac{1}{5056} \approx 0{,}198 \cdot 10^{-3}.$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}822$; $P(A) = 1/5056 \approx 0{,}198 \cdot 10^{-3}$.

Пример 1.16. *В партии из $N = 100$ изделий имеются $M = 12$ бракованных. Из партии наудачу выбираются $n = 10$ изделий. Определить вероятность того, что среди этих 10 изделий будет ровно $m = 2$ бракованных.*

Р е ш е н и е: Всех равновозможных случаев здесь будет C_{100}^{10}. Обозначим через A событие – появление 2 бракованных изделий среди выбранных наудачу 10 изделий. Так как всех бракованных изделий 12, то число способов, которыми можно вынуть 2 бракованных изделия, равно C_{12}^2. Но каждый из этих способов может дополняться любой группой изделий из числа способов, которыми можно вынуть оставшиеся $10 - 2$ годных из общего числа годных $100 - 12$ изделий. Число таких групп равно $C_{100-12}^{10-2} = C_{88}^8$. Таким образом, всех случаев, благоприятствующих событию A, будет $C_{12}^2 \cdot C_{88}^8$ и вероятность

$$P(A) = \frac{C_{12}^2 \cdot C_{88}^8}{C_{100}^{10}}.$$

Здесь была использована формула выборки (1.14).

Для вычисления вероятности по полученной формуле, используем Maxima-программу:

(%i1) P:binomial(12,2)*binomial(88, 8)/binomial(100, 10),numer;

(%o1) 0.24507224642386

или MathCad-программу:

$$P = \frac{combin(12,2) \cdot combin(88,8)}{combin(100,10)} \qquad P = 0.245$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}245$.

Пример 1.17. *Телефонный номер состоит из семи цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.*

Р е ш е н и е: Цифры изменяются от 0 до 9, поэтому количество всех номеров будет 10^7, а число номеров с различными цифрами равно числу размещений $A_{10}^7 = 10!/3!$. Следовательно,

$$P(A) = 10!/(3! \cdot 10^7) = 189/5^5 \approx 0{,}061.$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}061$.

Пример 1.18. *В автобусе находятся 5 пассажиров, причём каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любой из оставшихся 7 остановок автобуса. Найти вероятность того, что: а) все пассажиры выйдут на одной остановке, б) все выйдут на четвертой остановке, в) все выйдут на разных остановках, г) на одной остановке выйдут три, а на другой два.*

Р е ш е н и е: Общее число случаев $n = 7^5$.

а) Здесь $m = 7$, т.е. числу всех остановок; тогда $P(A) = 1/7^4 \approx\ 0{,}416 \cdot\ 10^{-3}$;

б) $m = 1,\ P(B) = 1/7^5 \approx 0{,}594 \cdot 10^{-5}$;

в) $\quad m = C_7^5 = 21, \qquad P(C) = 21/7^5 = 3/7^4 \approx 0{,}125 \cdot 10^{-2};$

г) число способов, которыми можно выбрать одну остановку, на которой сойдут три пассажира, равно $C_7^1 = 7$; кроме того, мы должны учесть C_5^3 способов, которыми можно выбрать этих трёх пассажиров из пяти; число способов, которыми можно выбрать остановку, где сойдут оставшиеся два пассажира, равно $C_6^1 = 6$; таким образом,

$$m = C_5^3 \cdot C_7^1 \cdot C_6^1 \quad \text{и} \quad P(D) = 60/7^4 \approx 0{,}025.$$

Ответ: $P(A) = 1/7^4 \approx 0{,}416 \cdot 10^{-3}$; $P(B) = 1/7^5 \approx 0{,}594 \cdot 10^{-5}$; $P(C) = 3/7^4 \approx 0{,}125 \cdot 10^{-2}$; $P(D) = 60/7^4 \approx 0{,}025$.

Пример 1.19. *Из шести карточек с буквами А, В, Д, З, К, О выбираются наудачу в определённом порядке пять. Найти вероятность того, что при этом получится слово ЗАВОД.*

Р е ш е н и е: Заметим, что здесь, в отличие от примера 1.14, производится выборка пяти букв из шести и в нужной последовательности. Тогда вероятность

$P(A) = 1/A_6^5 = 1/720 \approx 0{,}001$.

Ответ: $P(A) = 1/720 \approx 0{,}001$.

Пример 1.20. *Восемь студентов садятся в аудитории случайно на один ряд. Найти вероятность того, что три определённых студента окажутся рядом.*

Р е ш е н и е: Всех комбинаций здесь будет $n = 8!$. Трёх определённых студентов можно посадить подряд шестью способами (начиная с 1-го места, со 2-го и т.д., с 6-го), причём нужно учесть, что внутри тройки $3!$ комбинаций; пятерых оставшихся студентов можно разместить $5!$ способами. Таким образом,

$m = 6 \cdot 3! \cdot 5!$ и $P(A) = 6 \cdot 3! \cdot 5!/8! = \dfrac{3}{28} \approx 0{,}107.$

Ответ: $P(A) = \dfrac{3}{28} \approx 0{,}107.$

Пример 1.21. *Из колоды в 36 карт наугад вынимают 8 карт. Найти вероятность того, что взяли: а) три карты бубновой масти и три карты чёрной масти; б) хотя бы одну картинку?*

Решение: а) В колоде карт всего 9 карт бубновой масти и 18 карт чёрной масти. Искомое событие A происходит когда вытаскивают три карты бубновой масти и три карты чёрной и две карты червонной масти. Применяем формулу выборки для трёх предметов (1.14).

$$P(A) = \frac{C_9^3 \cdot C_{18}^3 \cdot C_9^2}{C_{36}^8} = \frac{9! \cdot 18! \cdot 9! \cdot 8! \cdot 28!}{3! \cdot 6! \cdot 3! \cdot 15! \cdot 2! \cdot 7! \cdot 36!} = \frac{4032}{49445}.$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{4032}{49445} \approx 0{,}082.$

б) Искомое событие $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8$. Где A_i — событие состоящее в том, что вытащили i карт являющихся картинками. $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) + P(A_8)$. При этом $P(A_i) = \dfrac{C_{16}^i \cdot C_{16}^{8-i}}{C_{36}^8}$. Вычисляем все восемь вероятностей, суммируем и получаем ответ.

Но нетрудно заметить, что $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 = \Omega - A_0$. Поэтому, $P(A) = 1 - P(A_0) = 1 - \dfrac{C_{26}^8}{C_{36}^8} = 1 - \dfrac{26! \cdot 8! \cdot 28!}{8! \cdot 18! \cdot 36!} = 1 - \dfrac{19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26}{29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36} = 1 - \dfrac{28405}{550188} = \dfrac{521783}{550188} \approx 0{,}94837.$

Проверка:

P:1-binomial(26,8)/binomial(36,8);%,numer; $\dfrac{521783}{550188} \approx 0{,}94837.$

Задания для самостоятельной работы

Пример 1.22. *В электрическую цепь последовательно подсоединены два выключателя. Каждый из них может быть как включен, так и выключен. Рассмотрим события: A — включен первый выключатель, B включен второй выключатель, C — по цепи идет ток. Выразите события C и $\bar{C}$ через A и B.*

Пример 1.23. *В группе студентов несколько человек являются отличниками; группа делится также по цвету волос на шатенов,* *брюнетов и блондинов. Из группы наудачу отобраны два человека с разным цветом волос. Пусть событие A — выбран шатен, событие B — выбран брюнет, событие C — выбран отличник. Опишите события: AC, $\bar{A}\bar{B}$, ABC.*

Пример 1.24. *По аналогии с задачей 1.3 доказать, что*
а) $\overline{\bar{A}_1\bar{A}_2...\bar{A}_n} = A_1 + A_2 + ... + A_n$,
б) $\overline{A_1A_2...A_n} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + ...\bar{A}_n$.

Пример 1.25. *Доказать, что* $(A+B)(A+C) = A+BC$.

Пример 1.26. *Событие A - первый узел автомобиля работает безотказно, событие B - второй узел автомобиля работает безотказно. Опишите события: $\bar{A}$ и $\bar{B}$, $A+B, AB, A\bar{B}, \bar{A}B, A\bar{B}+\bar{A}B$; как и в задаче 1.8, сделайте рисунки.*

Пример 1.27. *Процент выполнения задания предприятием в течение 10 дней соответственно равняется*

$$107, 111, 109, 116, 115, 105, 112, 114, 121, 124.$$

Какова относительная частота дней, в которые задание было выполнено более чем на 110 процентов?

Пример 1.28. *В ящике «Спортлото» находится 36 шаров, помеченных номерами от 1 до 36. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется с номером, кратным 3?*

Пример 1.29. *Найдите вероятность того, что взятое наудачу двузначное число кратно 5.*

Пример 1.30. *Буквы, составляющие слово РАКЕТА, написаны по одной на шести карточках; карточки перемешаны и положены в пакет. а) Чему равна вероятность того, что, вынимая четыре буквы, получим слово РЕКА? б) Какова вероятность сложить слово КАРЕТА при вынимании всех букв?*

Пример 1.31. *В цех сборки привезли 25 карбюраторов, из которых 20 изготовлены Московским заводом. Найти вероятность того, что среди 10 взятых наудачу карбюраторов окажутся: а) все карбюраторы Московского завода, б) 7 карбюраторов Московского завода.*

Пример 1.32. *Из 36 номеров лотереи 5 выигрышных. В одном билете зачёркиваются наудачу 5 номеров. Какова вероятность того, что из них будут выигрышными: а) 3 номера? b) 4 номера?*
с) 5 номеров?

Пример 1.33. *Полная колода содержит 52 карты, разделяющиеся на 4 различные масти по 13 карт в каждой. Взяли 5 карт. Найти вероятность того, что среди этих карт будет шестерка трефовой масти.*

Пример 1.34. *Бригада, состоящая из 20 мужчин и 4 женщин делится наудачу на два равных звена. Найти вероятность того, что в каждом звене окажется по две женщины.*

Пример 1.35. *В студенческой лотерее выпущено 100 билетов, из которых 15 выигрышных. Куплено три билета. Какова вероятность того, что один из них выигрышный?*

Пример 1.36. *Из колоды в 52 карты наудачу выбирается четыре. Найти вероятность того, что среди них окажется одна десятка.*

Пример 1.37. *В урне 10 белых и 15 чёрных шаров. Из урны вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что все они будут чёрными.*

Пример 1.38. *Из колоды в 36 карт наудачу выбирают три карты. Какова вероятность того, что среди них окажется две дамы?*

Пример 1.39. *В конверте среди 80 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 20 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.*

Пример 1.40. *Полная колода карт (52 листа) делится пополам. Найти вероятность того, что число чёрных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым.*

Пример 1.41. *Десять книг на одной полке расставлены наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определённые книги окажутся поставленными рядом.*

Пример 1.42. *Четыре пассажира случайным образом рассаживаются по шести вагонам. Определить вероятность того, что в первых четырёх вагонах окажется по одному пассажиру.*

Пример 1.43. *В лифте имеются 5 пассажиров, которые случайным образом сходят на семи этажах. Определить вероятность того, что на первых пяти этажах сойдет ровно по одному пассажиру.*