Лекция 4. Виды распределений

Биномиальное, пуассоновское, геометрическое распределения, их производящие функции и числовые характеристики. Непрерывная случайная величина, функция распределения, плотность распределения, свойства плотности. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Основные непрерывные распределения (равномерное, показательное).

4.1. Биномиальное распределение

Пусть проведено n независимых испытаний с вероятностью p появления события A в каждом испытании (испытания Бернулли). Обозначим ξ – случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях. По формуле Бернулли

$$P(\xi = m) = P(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p,\ m = 0{,}1,\ \ldots, n. \tag{4.1}$$

Определение 4.1. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое нижеприведенной таблицей, называется* ***биномиальным***.

ξ	0	1	2	...	k	...	n
p	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2p^2q^{n-2}$	...	$C_n^kp^kq^{n-k}$	...	p^k

Биномиальное распределение определяется двумя параметрами n и p.
Докажем, что сумма всех вероятностей равна 1.
Действительно, в соответствии с биномом Ньютона:

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Но, с другой стороны: $(p+q)^n = \big(p + (1-p)\big)^n = 1$. Следовательно

$$\sum_{m=0}^{n} p_m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = 1.$$

Для определения числовых характеристик случайной величины ξ, распределённой по биномиальному закону, найдем её производящую функцию

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} (pz)^k = (q+pz)^n.$$

Далее находим производные первого и второго порядков

$\varphi'(z) = np(q + pz)^{n-1}$,

$\varphi''(z) = n(n-1)(q + pz)^{n-2}p^2$.

Находим значения производных при $z = 1$
$\varphi'(1) = np(q + p)^{n-1} = np, \quad \varphi''(1) = n(n-1)(q + p)^{n-2}p^2 = n^2p^2 - np^2$.

Для определения математического ожидания и дисперсии применяем ранее полученные формулы
$M(\xi) = \varphi'(1) = M(\xi) = np$.
$D(\xi) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 =$
$= np - np^2 = np(1-p) = npq$.

Итак, для биномиально распределённой случайной величины ξ получили:

$$M(\xi) = np; \quad D(\xi) = npq. \tag{4.2}$$

Пример 4.1. *Монета брошена 4 раза. Написать закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию числа выпадений орла.*

◀Найдём вероятности выпадения орла по формуле Бернулли при $n = 4$, $p = 0{,}5$:

$$P_4(0) = 0{,}5^4 \approx 0{,}0625; \quad P_4(1) = 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}25;$$
$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}375;$$
$$P_4(3) = p_4(1) = 0{,}25; \quad P_4(4) = p_4(0) \approx 0{,}0625.$$

Искомый закон распределения задаётся таблицей:

ξ	0	1	2	3	4
p	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

По формулам (4.2) находим:

$$M(\xi) = n \cdot p = 4 \cdot 0{,}5 = 2; \quad D(\xi) = nqp = 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 1. \blacktriangleright$$

Ответ: $M(\xi) = 2$, $D(\xi) = 1$.

Пример 4.2. *Производится двадцать выстрелов по мишени. Вероятность попадания при первом выстреле равно* 0,1, *а при каждом последующем выстреле производится корректировка прицела, поэтому вероятность попадания увеличивается на 10%. Написать закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию числа попаданий в мишень.*

◀Подсчитываем вероятности попаданий при каждом выстреле. Для этого используем формулу сложных процентов: $p_k = 0{,}1(1+0{,}1)^k$, $k = \overline{0,20}$. Получаем следующие значения массивов попаданий в цель p и промахов $q = 1 - p$:
$(p)[0.1, 0.11, 0.121, 0.1331, \cdots]$

Применяем формулу (2.15) для $n = 20$ и полученных массивов p и q.

Для решения задачи используем Maxima-программу. На рис. 19 представлен график функции распределения данной задачи.

```
   kill(all)$  fpprintprec:4$N:20$
   p:makelist(0.1*(1+0.1)^k,k,0,N-1);q:1-p;
   P:product((q[k]+p[k]*z),k,1,N);
   Fi:expand(P);
   K:makelist(coeff(Fi,z^n),n,0,N)$  K[1]:coeff(Fi,z,0)$K;
   s:sum(K[i],i,1,N+1);
   plot2d([discrete, K], [x,1,14],[style,points])$
(p) [0.1,0.11,0.121,0.1331,0.1464,0.1611,0.1772,0.1949,
    0.2144,0.2358,0.2594,0.2853,0.3138,0.3452,0.3797,
    0.4177,0.4595,0.5054,0.556,0.6116]
(q) [0.9,0.89,0.879,0.8669,0.8536,0.8389,0.8228,0.8051,
    0.7856,0.7642,0.7406,0.7147,0.6862,0.6548,0.6203,
    0.5823,0.5405,0.4946,0.444,0.3884]
(P) (0.1*z+0.9)*(0.11*z+0.89)*(0.121*z+0.879)*(0.1331*z+0.8669)*
(0.1464*z+0.8536)*(0.1611*z+0.8389)*(0.1772*z+0.8228)*
*(0.1949*z+0.8051)*(0.2144*z+0.7856)*(0.2358*z+0.7642)*
*(0.2594*z+0.7406)*(0.2853*z+0.7147)*(0.3138*z+0.6862)*
*(0.3452*z+0.6548)*(0.3797*z+0.6203)*(0.4177*z+0.5823)*
(0.4595*z+0.5405)*(0.5054*z+0.4946)*(0.556*z+0.444)*
*(0.6116*z+0.3884)
(Fi) 7.322*10^-13*z^20+5.392*10^-11*z^19+1.841*10^-9*
*z^18+3.87*10^-8*z^17+5.616*10^-7*z^16+5.976*10^-6*z^15+
*4.835*10^-5*z^14+3.044*10^-4*z^13+0.001514*z^12+0.005997*
*z^11+0.01903*z^10+0.04841*z^9+0.09848*z^8+0.1592*
z^7+0.2025*z^6+0.1993*z^5+0.1481*z^4+0.08008*z^3+
+0.02961*z^2+0.006671*z+6.883*10^-4
(%o9) [6.883*10^-4,0.006671,0.02961,0.08008,0.1481,0.1993,
0.2025,0.1592,0.09848,0.04841,0.01903,0.005997,0.001514,
3.044*10^-4,4.835*10^-5,5.976*10^-6,5.616*10^-7,3.87*10^-8,
1.841*10^-9,5.392*10^-11,7.322*10^-13]
(%o11) 1.0
```

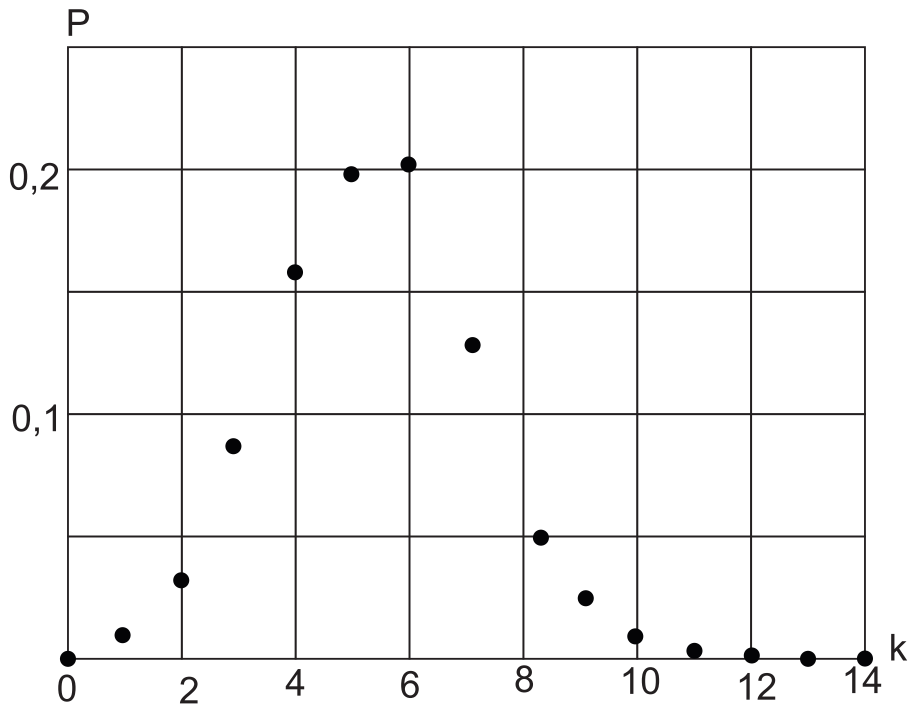

Рис. 19. *Распределение для примера 4.2*

4.2. Распределение Пуассона

Пусть в испытаниях Бернулли $n \to \infty$, $p \to 0$, так, что $np \to \lambda$. Тогда, как отмечалось ранее, вероятность $P_n(m)$ приближённо определяется с помощью формулы Пуассона:

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0. \tag{4.3}$$

Определение 4.2. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое формулой (4.3), называется* ***распределением Пуассона*** *или пуассоновским распределением.*

Запишем закон распределения Пуассона в виде таблицы:

ξ	0	1	2	$\ldots$	m	$\ldots$
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	$\ldots$

Распределение Пуассона определяется одним параметром λ.

Докажем, что сумма всех вероятностей равна 1.

Действительно, используя разложение в ряд Тейлора для e^{λ}, получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Найдём математическое ожидание и дисперсию такой случайной величины.

Для случайной величины ξ, имеющую распределение Пуассона, найдем её производящую функцию

$$\varphi(z)=\sum_{m=0}^{n}p_m z^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}z^m=e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}z^m=e^{-\lambda}e^{\lambda z}=e^{\lambda(z-1)}.$$

Далее находим производные первого и второго порядков

$\varphi'(z)=\lambda e^{\lambda(z-1)}$, $\varphi''(z)=\lambda^2 e^{\lambda(z-1)}$.

Находим значения производных при $z=1$
$\varphi'(1)=\lambda,\quad \varphi''(1)=\lambda^2.$

Для определения математического ожидания и дисперсии применяем ранее полученные формулы
$M(\xi)=\varphi'(1)=\lambda.$
$D(\xi)=\varphi''(1)+\varphi'(1)-\left(\varphi'(1)\right)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$

Итак, для случайной величины имеющей распределение Пуассона

$$M(\xi)=D(\xi)=\lambda. \tag{4.4}$$

Пример 4.3. *Вероятность появления опечатки на одной странице книги равна 0,01. Найти вероятность того, что в книге из 300 страниц имеется более трёх опечаток.*

◀Проводится $n=300$ повторных независимых испытаний вероятность в каждом одинакова и равна $p=0{,}01$, $\lambda=np=3$. Вероятность искомого события A, приближённо определяется с помощью формулы Пуассона:
$P(\xi=m)=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$

$P(A)=P_{300}(4)+P_{300}(5)+\ldots+P_{300}(300).$

Применяем формулу для вероятности противоположного события

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\Big(P_{300}(0)+P_{300}(1)+P_{300}(2)+P_{300}(3)\Big)=$

$=1-\left(\dfrac{3^0}{0!}e^{-3}+\dfrac{3^1}{1!}e^{-3}+\dfrac{3^2}{2!}e^{-3}+\dfrac{3^3}{3!}e^{-3}\right)=1-e^{-3}\Big(1+3+4{,}5+4{,}5\Big)=$

$=1-13\cdot e^{-3}\approx 0{,}3528.$▶

4.3. Геометрическое распределения

Пусть производится ряд независимых испытаний («попыток») для достижения некоторого результата (события A), и при каждой попытке событие A может появиться с вероятностью p. Тогда число попыток ξ до появления события A, включая удавшуюся, является дискретной случайной величиной, возможные значения которой принимают значения: $m = 1, 2, \ldots, m, \ldots$ Вероятности их по теореме умножения вероятностей для независимых событий равны

$$P(\xi = m) = pq^{m-1}, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{4.5}$$

где $0 < p < 1, \quad q = 1 - p$.

Ряд распределения ξ имеет вид

ξ	1	2	3	$\ldots$	m	$\ldots$
P	p	pq	pq^2	$\ldots$	pq^{m-1}	$\ldots$

Как видно, вероятности $P_m = P(\xi = m) = pq^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots$, образуют для ряда последовательных значений бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q (потому распределение и называется ***геометрическим***). Сумма вероятностей возможных значений случайной величины будет равна

$$S = p + pq + pq^2 + \ldots + pq^{m-1} + \ldots = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Примеры случайных величин, распределённых по геометрическому закону: число выстрелов до первого попадания, число испытаний устройства до первого отказа, число бросаний монеты до первого выпадения герба (или решки) и т.п.

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ для геометрического распределения: Для случайной величины ξ, имеющую геометрическое распределение, найдем её производящую функцию

$$\varphi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} z^m = pz \sum_{m=1}^{\infty} (qz)^{m-1} = \frac{pz}{1 - zq}.$$

Далее находим производные первого и второго порядков

$$\varphi'(z) = p\frac{1 - zq + zq}{(1-zq)^2} = \frac{p}{(1-zq)^2} \quad ,$$

$$\varphi''(z) = p\left((1-zq)^{-2}\right)' = 2pq(1-zq)^{-3} = \frac{2pq}{(1-zq)^3}.$$

Находим значения производных при $z = 1$

$\varphi'(1) = \dfrac{1}{p}, \quad \varphi''(1) = \dfrac{2pq}{p^3} = \dfrac{2q}{p^2}.$

$M(\xi) = \varphi'(1) = \dfrac{1}{p}.$

$D(\xi) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = \dfrac{2q}{p^2} + \dfrac{1}{p} - \left(\dfrac{1}{p}\right)^2 = \dfrac{q}{p^2}.$

Итак, для случайной величины ξ имеющей геометрическое распределение, получили

$$M(\xi) = D(\xi) = \lambda. \tag{4.6}$$

Пример 4.4. *На проверку поступило 6 деталей, из которых 2 бракованные. Детали проверяются до обнаружения бракованной детали. Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ – числа проверенных деталей. Найти вероятность того, что будет проверено пять деталей.*

◀Случайная величина ξ принимает значения: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Используя формулу $P(\xi = m) = pq^{m-1}, \qquad m = 1, 2, \ldots$ для геометрической вероятности. Найдём их вероятности.

$P(\xi = 1) = 2/6, \quad P(\xi = 2) = 4/6 \cdot 2/5 = 4/15,$
$P(\xi = 3) = 4/6 \cdot 3/5 \cdot 2/4 = 1/5,$
$P(\xi = 4) = 4/6 \cdot 3/5 \cdot 2/4 \cdot 2/3 = 2/15,$
$P(\xi = 5) = 4/6 \cdot 3/5 \cdot 2/4 \cdot 1/3 \cdot 2/2 = 1/15.$

ξ	1	2	3	4	5
P	1/3	4/15	1/5	2/15	1/15

▶

Ответ: 0,67

4.4. Гипергеометрическое распределение

С гипергеометрическими распределениями мы встречались когда решали задачу о выборке. Гипергеометрическое распределение широко используется в практике статистического контроля качества продукции, в задачах организации выборочных обследований и др.

Таблица распределения имеет вид:

ξ	0	1	2	$\dots$	l
p	$\frac{C_L^0 C_{K-L}^k}{C_K^k}$	$\frac{C_L^1 C_{K-L}^{k-1}}{C_K^k}$	$\frac{C_L^2 C_{K-L}^{k-2}}{C_K^k}$	$\dots$	$\frac{C_L^l C_{K-L}^0}{C_K^k}$

Здесь $k \leqslant K$, $l = min(k;L)$, $L \leqslant K$ и сумма всех вероятностей равна единице.

Типичное толкование: случайная величина ξ равна числу белых шаров, попавших в выборку без возвращения k шаров из урны, содержащей K шаров, из которых L белых.

$$P(\xi = m) = \frac{C_L^m \cdot C_{K-L}^k}{C_K^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, l.$$

$$M(\xi) = k \cdot \frac{L}{K}.$$

Рассмотренные распределения являются распределениями дискретных случайных величин. Далее рассмотрим некоторые распределения непрерывных случайных величин.

4.5. Равномерное распределение

Определение 4.3. *Распределение непрерывной случайной величины называется* ***равномерным*** *на* $[a;b]$, *если плотность распределения постоянна и отлична от 0 на этом отрезке и равна нулю вне его:*

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{при} \quad x \in [a;b], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Используя 6 свойство плотности распределения (п. 3.20), найдём константу C.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \implies \int_a^b C dx = 1 \implies$$

$$\implies Cx\Big|_a^b = 1 \implies C(b-a) = 1 \implies C = \frac{1}{b-a}.$$

Итак, плотность равномерно распределённой на $[a;b]$ случайной величины определяется по формуле:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x \in [a;b], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [a;b]. \end{cases} \tag{4.7}$$

С помощью свойства 4 плотности (п. 3.20) найдем функцию распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

$$\begin{array}{lll}
\text{При} & x < a & F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0; \\
\text{при} & a \leqslant x \leqslant b & F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a}; \\
\text{при} & x > b & F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int_{b}^{x} 0dt = \frac{b-a}{b-a} = 1.
\end{array}$$

Итак, мы получили функцию распределения равномерно распределённой на $[a; b]$ случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{при} \quad b < x. \end{cases} \tag{4.8}$$

Равномерное распределение определяется двумя параметрами a и b. Графики плотности и функции распределения равномерной на [a;b] случайной величины представлены на рис. 20.

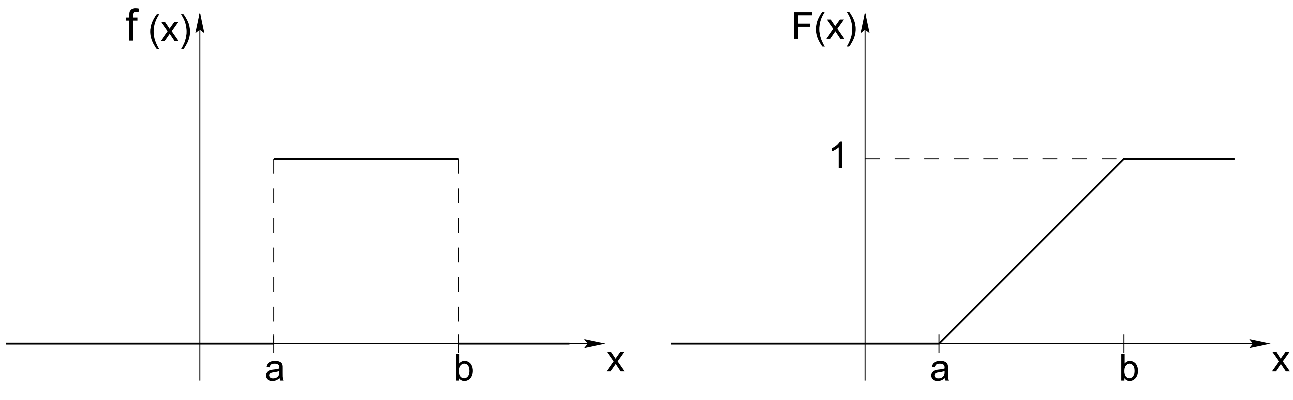

Рис. 20. *Плотность и функция распределения равномерного распределения*

Найдём математическое ожидание и дисперсию:

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int\limits_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2\cdot(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \int\limits_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - \frac{(a+b)^2}{4} =$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^3}{3\cdot(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$
$$= \frac{4\cdot(a^2+ab+b^2) - 3\cdot(a+b)^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Итак, для равномерно распределённой на $[a;b]$ случайной величины получим:

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}; \quad D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{4.9}$$

Замечание 4.1. *Найдём $P(x \leqslant \xi < x+\Delta x)$ при условии, что $a \leqslant x < x+\Delta x \leqslant b$. Пользуясь свойством 5 плотности (п. 3.20), получаем:*

$$P(x \leqslant \xi < x+\Delta x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{x+\Delta x - x}{b-a} = \frac{\Delta x}{b-a}.$$

Как видим, эта вероятность не зависит от x, т.е. от положения промежутка внутри $[a;b]$, а только от длины промежутка Δx. Этим объясняется название распределения — равномерное. Вероятность распределена «равномерно» по отрезку $[a;b]$ (плотность постоянна). Очевидно, что в этом случае среднее значение случайной величины равно середине отрезка: $M(\xi) = \dfrac{a+b}{2}$.

Пример 4.5. *Плотность распределения постоянна на отрезке $[0;4]$ и равна нулю вне его. Найти плотность и функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.*

◀В соответствии с определением 4.3 эта случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[0;4]$. Следовательно:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{при} \quad x \in [0;4], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0;4], \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{x}{4} & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4, \end{cases}$$

$$M(\xi) = 2; \quad D(\xi) = \frac{(4-0)^2}{12} = \frac{4}{3} \approx 1{,}333.$$

Ответ $M(\xi) = 2$; $D(\xi) = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}333$.

4.6. Экспоненциальное распределение

Определение 4.4. *Распределение непрерывной случайной величины называется* ***экспоненциальным*** *(показательным), если плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{\textit{при}} \;\; x \geqslant 0, \\ 0 & \text{\textit{при}} \;\; x < 0, \quad \text{\textit{где}} \; \lambda > 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Экспоненциальное распределение определяется одним параметром $\lambda > 0$.

Найдем функцию распределения:

$$\text{при } x \geqslant 0 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x};$$

$$\text{при } x < 0 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Итак, функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \;\; x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \;\; x < 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Графики плотности и функции распределения экспоненциального распределения представлены на рис. 21.

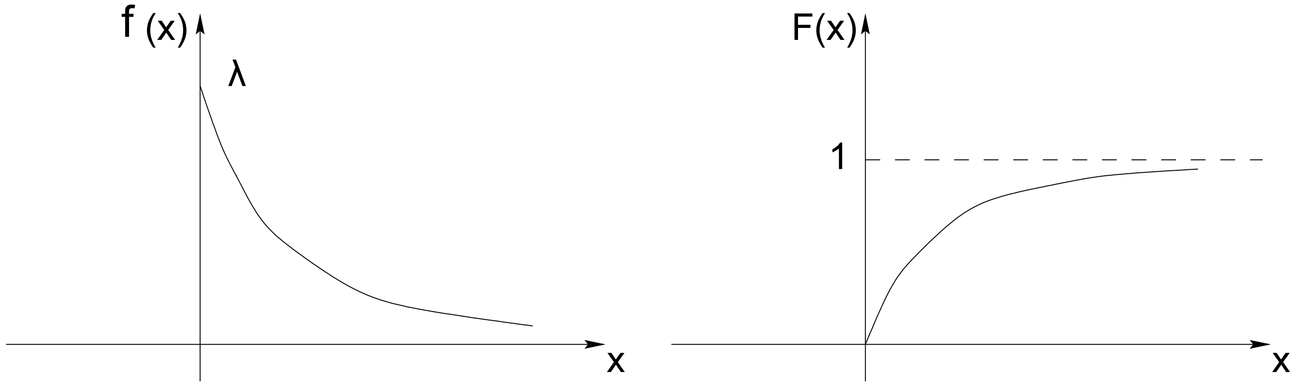

Рис. 21. *Плотность и функция распределения экспоненциального распределения*

Найдём математическое ожидание и дисперсию.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dt = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = e^{-\lambda x} dx & v = -\dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{array} \right] = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Самостоятельно проведите выкладки и докажите, что:

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \frac{1}{\lambda^2} = \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Итак, для экспоненциально распределённой случайной величины получим:

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{4.12}$$

Замечание 4.2. *Можно доказать, что если через независимые случайные промежутки времени* $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, *имеющие экспоненциальное распределение с параметром* λ, *происходит какое-либо событие (например, поступает вызов на телефонную станцию или приходит покупатель в магазин), то количество этих событий, произошедших за любой промежуток времени* t, *является случайной величиной, имеющей пуассоновское распределение с параметром* $a = \lambda t$.