Лекция 2. Основные теоремы теории вероятностей

Условная вероятность. Независимость событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Производящие функции. Пуассоновский предел. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

2.1. Теорема сложения вероятностей

В лекции 1 (теорема 1.2) было доказано, что вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей (формула 1.17). Из этой теоремы получаем следствие:

Следствие 2.1. *Вероятность суммы n попарно несовместных событий A и B равна сумме их вероятностей:*

$$P(A_1 + \ \ldots + A_n) = P(A_1) + \ \ldots + P(A_n), \ \textit{если } A_iA_j = \varnothing \textit{ при } i \neq j. \quad (2.1)$$

В общем случае верна более общая теорема:

Теорема 2.1 (***Теорема сложения вероятностей***). *Вероятность суммы двух событий A и B равна сумме их вероятностей минус вероятность их произведения AB:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.2)$$

Доказательство. Обозначим N — число возможных элементарных исходов испытания, m_1 — число исходов, в которых появляется событие A, m_2 — число исходов, в которых появляется B, m — число исходов, в которых одновременно появляется наступлению оба события одновременно (см. рис. 3).

Как видно из рис. 3, количество исходов в происходит событие A+B, равно $m_1 + m_2 - m$.

Следовательно:

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2 - m}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m}{n} = \\ = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Пример 2.1. *Найти вероятность появления карты красной масти или шестёрки при однократном вынимании карты из колоды в 36 карт.*

◀Обозначим: A — событие состоящее в появление карты красной масти, B — появление шестёрки. Найдем вероятность суммы этих событий. Очевидно:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{9}, \quad P(A \cdot B) = \frac{1}{18}.$$

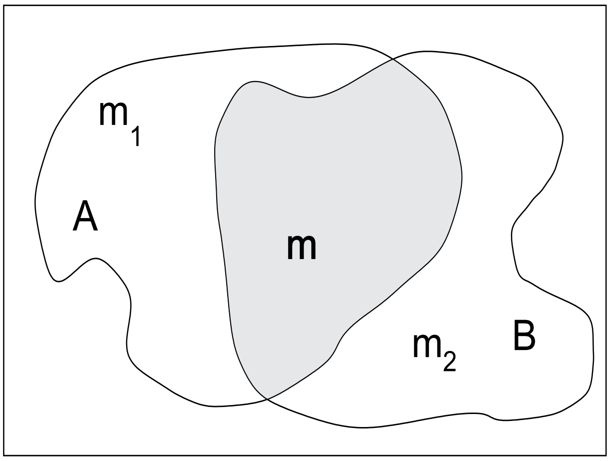

Рис. 3. Иллюстрация теоремы сложения вероятностей

Применяя формулу (2.2), получаем:

$$P(A+B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18} = \frac{5}{9} \approx 0{,}556. \blacktriangleright$$

2.2. Теорема произведения вероятностей

Определение 2.1. ***Условной вероятностью*** $P(A/B)$ *называют вероятность появления события A, вычисленную в предположении того, что событие B уже произошло.*

В литературе часто эту вероятность обозначают $P_B(A)$.

Пример 2.2. *В урне семь белых, четыре чёрных и три красных шара. Из урны вытащили четыре шара (событие A). Все они оказались белыми. Найти вероятность того, что следующий (уже пятый) шар не будет белым (событие B).*

◀После первого испытания в урне осталось десять шаров, из них семь не белых. Искомая вероятность равна:
$P(A/B) = 7/10 = 0{,}7$. ▶

Теорема 2.2 (***Теорема произведения вероятностей***). *Вероятность произведения двух событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A). \tag{2.3}$$

Доказательство. Обозначим n — общее количество возможных элементарных исходов данного испытания, m_1 — число исходов, при наступлении которых происходит события A, m — число исходов из числа m_1, при наступлении которых происходит событие B (рис. 3).

Очевидно: $P(A) = m_1/n$, $P(A \cdot B) = m/n$, $P(B/A) = m/m_1$.

Таким образом:

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m}{m_1} = P(A) \cdot P(B/A).$$

Следствие 2.2. *Вероятность совместного появления n событий равна произведению вероятностей одного из них на условные вероятности всех остальных:*

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 A_2) \ldots P(A_n/A_1 A_2 \ldots A_{n-1}). \quad (2.4)$$

Определение 2.2. *Событие B называют* ***независимым*** *от события A, если появление события A не изменяет вероятность события B:*

$$P(B/A) = P(B). \quad (2.5)$$

Легко показать, что свойство независимости событий взаимно.

Действительно, в соответствии с (2.3) и с учётом формулы (2.5): $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$.

С другой стороны, $P(A \cdot B) = P(B \cdot A) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Далее, $P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A/B)$ и $P(A/B) = P(A)$.

Для двух независимых событий A и B, с учётом определения 2.2, теорема произведения вероятностей 2.3 принимает следующий вид.

Теорема 2.3. *Вероятность* ***произведения двух независимых событий*** *равна произведению их вероятностей.*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.6)$$

Определение 2.3. *n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют независимыми в совокупности, если каждое событие независимо со всеми остальными событиями и их всевозможными произведениями.*

С учётом следствия 2.2 получаем следующее утверждение:

Следствие 2.3. *Вероятность совместного появления n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна произведению их вероятностей:*

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2) \ldots P(A_n). \quad (2.7)$$

Теорема 2.4. *Вероятность появления* ***хотя бы одного из*** *n* ***событий*** *$A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности единицы и произведения вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$:*

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_n).$$

◀Пусть $\bar{A}$ — событие противоположное событию А, состоящее в ненаступлении ни одного из n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots, \bar{A}_n.$$

Так как события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимы в совокупности, следовательно события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$ будут так же являются независимы в совокупности. Поэтому

$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n)$, откуда
$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n)$. ▶

Следствие 2.4. *Если n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности и имеют одинаковую вероятность появления $P(A_i) = p$, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий (событие A) равна:*

$$P(A) = 1 - (1-p)^n. \tag{2.8}$$

Пример 2.3. *Из колоды в 36 карт сразу вынимают 2 карты. Какова вероятность того, что среди них не будет карты пиковой масти (Событие A)?*

◀Для того, чтобы произошло искомое событие A, необходимо чтобы одновременно произошли два события: A_1 – первая вынутая карта не пиковая; A_2 – вторая вынутая карта не пиковая. Эти события зависимы, поэтому

$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)$.

$P(A_1) = 27/36$. Так как событие A_1 произошло, т.е. вынули карту не пиковой масти. Поэтому в колоде уже не 36, а 35 карт, причём карт не пиковой масти осталось 26. Поэтому $P(A_2/A_1) = 26/35$.

Следовательно, $P(A) = \dfrac{27}{36} \cdot \dfrac{26}{35} = \dfrac{27 \cdot 26}{36 \cdot 35} = \dfrac{39}{70} \approx 0{,}557$.▶

Ответ: $\dfrac{39}{70} \approx 0{,}557$.

Эту задачу можно решить другим способом, используя классическое определение вероятностей и формулы для сочетаний.

◀$P(A) = \dfrac{m}{n}$, где $n = C_{36}^2$ — число всевозможных исходов данного испытания, а $m = C_{27}^2$ — число исходов благоприятствующих появлению события A.

$P(A) = \dfrac{C_{27}^2}{C_{36}^2} = \dfrac{27! \quad 2! \cdot 34!}{2! \cdot 25! \quad 36!} = \dfrac{27 \cdot 26}{36 \cdot 35} = \dfrac{39}{70} \approx 0{,}557$.▶

Пример 2.4. *Из партии, содержащей 100 одинаковых деталей, для контроля партии извлекаются 5 деталей. Условием непригодности всей партии является появление хотя бы одной бракованной детали среди контролируемых. Какова вероятность того, что партия будет принята, если она содержит 5% неисправных деталей?*

◀ Пусть A — искомое событие. A_i – событие, состоящее в том, что i – ая проверяемая деталь исправна, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Очевидно, $A = A_1A_2A_3A_4A_5$.

Применяем теорему о произведении вероятностей для n событий (2.4)
$P(A) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot P(A_4/A_1A_2A_3)\cdot P(A_5/A_1A_2A_3A_4) =$
$= \dfrac{95}{100}\cdot\dfrac{94}{99}\cdot\dfrac{93}{98}\cdot\dfrac{92}{97}\cdot\dfrac{91}{96} = \dfrac{8277217}{10755360} \approx 0{,}7696.$▶

Ответ: $\dfrac{8277217}{10755360} \approx 0{,}7696.$

Пример 2.5. *В урне 2 белых и 4 чёрных шара. Два игрока поочередно извлекают шар (без возвращения). Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Найти вероятность выигрыша для каждого игрока.*

◀Пусть $A_{б}$ и $A_{ч}$ – элементарные исходы состоящие в извлечении белого или чёрного шара соответственно. Возможные исходы данного опыта заканчиваются вытаскиванием белого шара – событие $A_{б}$:
$A_{б},\ A_{ч}A_{б},\ A_{ч}A_{ч}A_{б},\ A_{ч}A_{ч}A_{ч}A_{ч}A_{б},\ A_{ч}A_{ч}A_{ч}A_{ч}A_{б}.$

Исходы в которых выиграет первый участник (событие A_1):
$A_1 = A_{б} + A_{ч}A_{ч}A_{б} + A_{ч}A_{ч}A_{ч}A_{ч}A_{б}.$

Исходы в которых выиграет второй участник (событие A_2):
$A_2 = A_{ч}A_{б} + A_{ч}A_{ч}A_{ч}A_{б}.$

Найдём вероятности этих событий.
$P(A_1) = \dfrac{2}{6} + \dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4} + \dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{3}{5}.$
$P(A_2) = \dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{15} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{5}.$▶

Ответ: $P(A_1) = \dfrac{3}{5};\ P(A_2) = \dfrac{2}{5}.$

Пример 2.6. *На пути движения автомашины до конечного пункта* 3 *светофора, каждый из которых либо разрешает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью* $p = 0{,}3$, *либо запрещает с вероятностью* $q = 0{,}7$. *Найти вероятность, что число остановок автомобиля на светофорах равно: а) 0; б) 1; в) 2 г) 3?*

◀Обозначим: A – события состоящие в том, что автомобиль без остановки проезжает текущий светофор.

По условию задачи $P(A) = p = 0{,}3 \Rightarrow P(\overline{A}) = q = 0{,}7$;
A_i – события состоящие в том, что остановиться на i светофорах. Найдем вероятности $P(A_i)$, происхождения данных событий.

а) Событие A_0 означает, что автомобиль проехал все три светофора без остановок. Это можно записать следующей формулой: $A_0 = A\cdot A\cdot A$. Так как события независимы, то применяем формулу (2.3).

Получаем $P(A_0) = P(A)\cdot P(A)\cdot P(A) = p^3 = 0{,}027.$

б) Событие A_1 означает, что автомобиль проехал два светофора без остановок и один с остановкой (остановился на первом, втором или третьем светофорах). Это можно записать следующей формулой:
$A_1 = \overline{A} \cdot A \cdot A + A \cdot \overline{A} \cdot A + A \cdot A \cdot \overline{A}$.

Получаем $P(A_1) = q \cdot p \cdot p + p \cdot q \cdot p + p \cdot p \cdot q = 3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}189$.

в) Событие A_2 означает, что автомобиль проехал один светофор без остановки и на двух останавливался (не остановился на первом, втором или третьем светофорах). Это можно записать следующей формулой:
$A_2 = A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} + \cdot \overline{A} \cdot A \cdot \overline{A} + \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot A$.

Получаем $P(A_2) = p \cdot q \cdot q + q \cdot p \cdot q + q \cdot q \cdot p = 3 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}441$.

г) Событие A_3 означает, что автомобиль останавливался на всех трёх светофорах, т.е. $A_3 = \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \overline{A}$. $P(A_3) = q^3 = 0{,}7^3 = 0{,}343$.

Сумма независимых событий A_0, A_1, A_2, A_3 образуют полную группу. Поэтому
$P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}027 + 0{,}189 + 0{,}441 + 0{,}343 = 1.$▶

Ответ: а) 0,027; б) 0,189; в) 0,441; г) 0,343.

2.3. Надёжность схем

Пример 2.7. *В электрической цепи (рис. 4) выключатели V_1 и V_2 независимо замкнуты с вероятностями $p_1 = 0{,}2$ и $p_2 = 0{,}6$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника R лампочка L: а) загорится б)не загорится?*

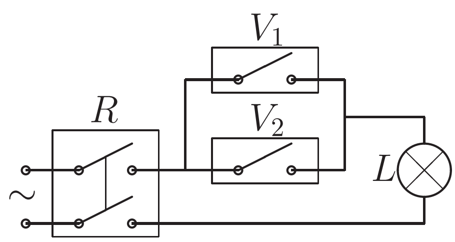

Рис. 4. К примеру 2.7

Пусть A_1 – событие состоящее в том, что лампочка загорится. Тогда противоположное событие $\overline{A_1} = A_2$ — лампочка не загорится.

а) ◀При параллельной коммутации выключателей лампочка L загорается, если замкнут хотя бы один выключатель, и не загорается, если все они одновременно разомкнуты.

Поэтому находим вероятность того, что оба выключатели разомкнуты
$P(A_2) = P(\overline{A_1}) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32$.
$P(A_1) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}32 = 0{,}68.$▶

б) Задача решена в процессе решения задачи а).

Ответ: а) 0,68; б) 0,32.

Пример 2.8. *В электрической цепи (рис. 5) выключатели V_1 и V_2 независимо разомкнуты с вероятностями $q_1 = 0{,}3$ и $q_2 = 0{,}1$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника R лампочка L: а) загорится (событие A_1) б)не загорится (событие A_2)?*

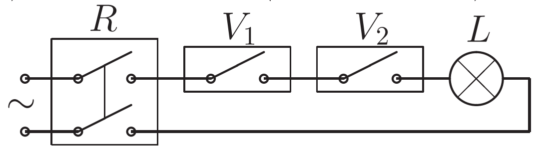

Рис. 5. Последовательное соединение двух элементов

◀ В данном примере заданы вероятности разомкнутости выключателей (q_1 и q_2). Вероятности замкнутости выключателей равны $p_1 = 1 - q_1 = 0{,}7$ и $p_2 = 1 - q_2 = 0{,}9$.

а) ◀Очевидно, что лампочка загорится когда оба выключателя замкнуты. Следовательно,

$P(A_1) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63.$▶

б) ◀Лампочка не загорится когда хотя бы один выключателя разомкнут. Поэтому найдём вероятность противоположного события которым является событие состоящее в том, что оба выключателя замкнуты.

$P(\overline{A_2}) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63.$

$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}63 = 0{,}37.$▶▶

Ответ: а) 0,63 б) 0,37.

Пример 2.9. *В электрической цепи (рис. 6) выключатели V_1, V_2 и V_3 независимо замкнуты с вероятностями $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}6$ и $p_3 = 0{,}3$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника R лампочка L: а) загорится; б) не загорится?*

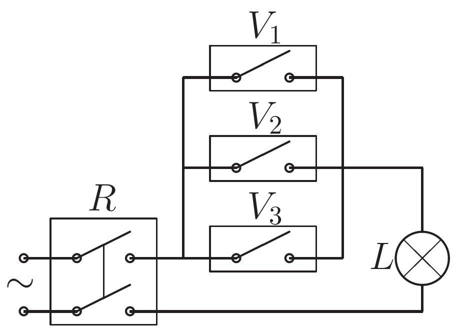

Рис. 6. Параллельное соединение трёх элементов

◀Введём события: A_1 — лампочка загорится, а A_2 — лампочка не загорится.

а, б) Лампочка загорится при включении рубильника R когда будет замкнут хотя бы один выключатель. Поэтому находим вероятность того, что все выключатели разомкнуты. Это и будет решением задачи б).

$P(A_2) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}224.$

Теперь находим вероятность противоположного события означающего, что лампочка загорится.

$P(A_1) = 1 - F(A_2) = 0{,}776.$ ►
Ответ: а) 0,77 б) 0,224.

Пример 2.10. *Релейная схема состоит из 10 элементов трёх типов A_1, A_2 и A_3, рис. 7а). Вероятность того, что за время T элементы не выйдут из строя известна и равна: $P(A_1) = 0{,}7$, $P(A_2) = 0{,}6$, $P(A_3) = 0{,}9$. Найти вероятность безотказной работы схемы.*

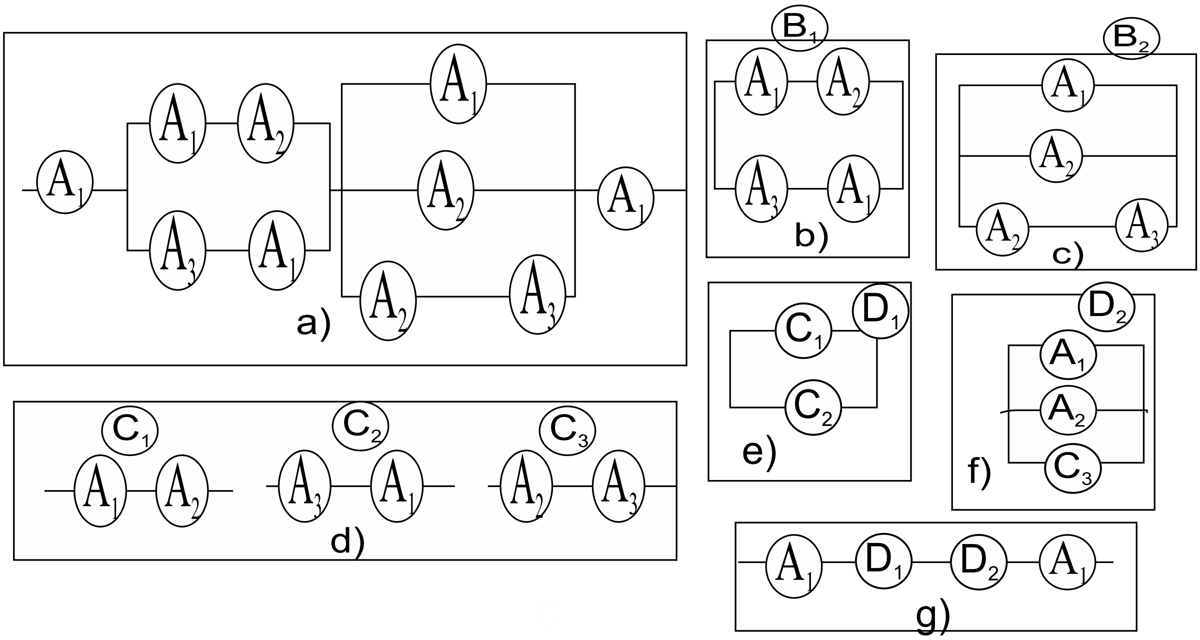

Рис. 7. *Пример 2.10*

◄ Событие состоящее в том, что схема работает безотказно в течении времени T обозначим A. Вероятность такого события A называется надёжностью схемы. Обозначим надёжности элементов $P(A_1) = p_1 = 0{,}7$, $P(A_2) = p_2 = 0{,}6$, $P(A_3) = p_3 = 0{,}9$.

Тогда вероятности отказа элементов $q_i = 1 - p_i$ будут равны $P(\overline{A_1}) = q_1 = 0{,}3, P(\overline{A_2}) = q_2 = 0{,}4, P(\overline{A_3}) = q_3 = 0{,}1$.

Выделим из исследуемой схемы блоки B_1 рис. 7b) и B_2, рис. 7c). Найдём их надёжность. Блок B_1 в свою очередь состоит их двух параллельно соединённых блоков содержащих по два последовательных элемента, назовём их C_1 и C_2, рис. 7d). В блоке B_2 также выделим аналогичный блок C_3.

Найдём надёжность блоков C_1, C_2 и C_3, состоящих из двух последовательных элементов. Эти блоки будут работоспособны, когда работают оба элемента. Так как они работают независимо друг от друга, поэтому можно применить теорему о вероятности произведения двух независимых событий.

$P(C_1) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}42$, $P(C_2) = P(A_1) \cdot P(A_3) =$ $= p_1 \cdot p_3 = 0{,}63$, $P(C_3) = P(A_2) \cdot P(A_3) = p_2 \cdot p_3 = 0{,}54$.

Найдём теперь надёжность блоков B_1 и B_2. С учётом обозначений рис. 7d), получаем схемы параллельно соединённых элементов, рис. 7e) и f).

При параллельном соединении элементов схема работоспособна, когда работает хотя бы один элемент. Для определения надёжности параллельного

блока находим сначала вероятность противоположного события — вероятность того, что блок вышел из строя, т.е. что все элементы неработоспособны, а затем применяем формулу для противоположного события.
$P(D_1) = 1 - P(\overline{C_1}) \cdot P(\overline{C_2}) = 1 - (1 - P(C_1)) \cdot (1 - P(C_2)) = 1 - 0{,}58 \cdot 0{,}37 =$
$= 1 - 0{,}2146 = 0{,}7854$.
$P(D_2) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{C_3}) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \times$
$\times (1 - P(C_3)) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}46 = 1 - 0,0552 = 0{,}9448$.

Наконец, заменяем блоки B_1 и B_2 элементами D_1 и D_2, получаем схему четырёх последовательных блоков, рис. (7g). Используя теорему о произведении вероятностей для несовместных событий, получаем
$P(A) = P(A_1) \cdot P(D_1) \cdot P(D_2) \cdot P(A_1) = 0{,}7^2 \cdot 0{,}7854 \cdot 0{,}9448 = 0{,}3636$.▶

Замечание 2.1. *Для определения вероятности отказа схемы $Q = P(\overline{A})$,находим сначала надёжность схемы $P = P(A)$, а затем находим вероятность противоположного события $Q = P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.*

2.4. Схема гипотез. Формула полной вероятности

Теорема 2.5 (***Формула полной вероятности***). *Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из попарно несовместных событий $H_1, H_2 \dots H_n$, образующих полную группу, называемых гипотезами, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n). \quad (2.9)$$

Кратко эту формулу можно записать в виде

$$P(A) = \sum_{i=k}^{n} P(H_k)P(A/H_k).$$

◀ Появление события A означает осуществление одного из n попарно несовместных событий образующих полную группу: H_1A, $H_2A, \ldots, H_nA$.

Следовательно, $A = H_1A + H_2A + \ldots + H_nA$.

Пользуясь следствием 2.1 из теоремы сложения и теоремой произведения вероятностей, получаем:
$P(A) = P(H_1A + \cdots + H_nA) = P(H_1A) + \cdots + P(H_nA) =$
$= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)$.▶

Пример 2.11. *Пять преподавателей принимают экзамен по теории вероятностей. Известно, что вероятность сдать экзамен двум из них («строгим» равна 0,6, а остальным трём («нестрогим») 0,8 . Найти вероятность сдать экзамен произвольному преподавателю.*

◀Пусть A — событие состоящее в том, что «экзамен сдан». Экзамен может быть сдан либо «строгому» преподавателю (гипотеза H_1), либо «нестрогому» (гипотеза H_2):

$$P(H_1) = 2/5 = 0{,}4; \qquad P(H_2) = 3/5 = 0{,}6.$$

Условные вероятности сдать экзамен при условии, что студенту достался «строгий» $(P(A/H_1))$ или нестрогий $(P(A/H_2))$ преподаватель равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}6; \qquad P(A/H_2) = 0{,}8.$$

Искомая вероятность определяется по формуле полной вероятности (2.9):

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0{,}72.▶$$

Ответ: 0,72.

Пример 2.12. *Детали с трёх конвейеров поступают на общий склад. Вероятности брака на первом, втором и третьем конвейерах равны* $p_1 = \dfrac{1}{3}$, $p_2 = \dfrac{5}{7}$ *и* $p_3 = \dfrac{2}{5}$. *Отношение производительностей линий* $V_1 : V_2 : V_3 = 4 : 7 : 3$. *С какой вероятностью наугад взятая деталь будет бракованной?*

◀ Искомое событие A наблюдается на фоне трёх гипотез $H_i = \{$деталь с i-го конвейера$\}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Из отношения производительности конвейеров $4 : 7 : 3$ следует, что из каждых $4 + 7 + 3 = 14$ деталей в среднем 4 сходят с 1-го конвейера, 7 — со второго и 3 — с третьего.

Значит, $P(H_1) = \dfrac{4}{14}$, $P(H_2) = \dfrac{7}{14}$, $P(H_3) = \dfrac{3}{14}$.

Данные вероятности $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}7$ и $p_3 = 0{,}4$ есть не что иное, как $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$ и $P(A/H_3)$. Подставим все значения в формулу (2.9):

$$P(A) = \frac{4}{14}\cdot\frac{1}{3} + \frac{7}{14}\cdot\frac{5}{7} + \frac{3}{14}\cdot\frac{2}{5} = \frac{113}{210} \approx 0{,}538.▶$$

Ответ: $\dfrac{113}{210} \approx 0{,}538$.

2.5. Формула Байеса

Теорема 2.6 (***Формула Байеса***). *Пусть события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из попарно несовместных событий $H_1, H_2 \ldots H_n$, образующих полную группу.*

Тогда для $i = 1, \ldots, n$ справедлива формула Байеса:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)}. \qquad (2.10)$$

◀По теореме произведения вероятностей:

$$P(H_i \cdot A) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i),$$

откуда с использованием формулы полной вероятностей для $P(A)$ получаем:
$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)}. \blacktriangleright$$

Формула Байеса позволяет вычислять вероятности появления i-той гипотезы после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого произошло событие A.

Пример 2.13. *В условиях примера 2.11 известно, что студент сдал экзамен. Найти вероятность того, что он сдавал «нестрогому» преподавателю.*

◀По формуле Байеса получаем:
$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)} =$$
$$= \frac{0{,}6 \cdot 0{,}8}{0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}8} = \frac{2}{3}. \blacktriangleright$$

Пример 2.14. *В двух урнах находятся шары: в первой – 4 белых и 6 черных, во второй – 5 белых и 3 черных. Из первой урны во вторую наудачу переложили два шара, а затем из второй урны наудачу извлекли один шар.*

1) Найти вероятность того, что этот шар белый.

2) Шар, извлеченный из второй урны, оказался белым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара.

1) ◀Пусть A – искомое событие: из второй урны извлечен белый шар. Возможны 3 гипотезы:
H_1 – из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара;
H_2 – из первой урны во вторую были переложены один белый и один чёрный шар;
H_3 – из первой урны во вторую были переложены 2 чёрных шара.

Вероятности осуществления гипотез равны

$$P(H_1) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}, \quad P(H_2) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}, \quad P(H_3) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}.$$

Если гипотезы выполняются, то условные вероятности осуществления события A будут равны

$$P(A/H_1) = \frac{5+2}{5+3+2} = 0{,}7, \quad P(A/H_2) = 0{,}6, \quad P(A/H_3) = 0{,}5.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$

$$= \frac{2}{15} \cdot 0{,}7 + \frac{8}{15} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 = 0{,}58.\blacktriangleright$$

2) ◀Во втором случае необходимо уточнить вероятность наступления гипотезы H_1. По формуле Байеса находим

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{(2/15) \cdot 0{,}7}{0{,}58} =\approx 0{,}161.\blacktriangleright$$

Ответ: 1)0,58, 2) $\approx 0{,}161$.

Пример 2.15. *Всхожесть моркови составляет 60%, свёклы — 80%. В лаборатории посадили по одному семени каждого овоща. Пророс один росток. Какова вероятность, что это:* (1) *морковь;* (2) *свёкла?*

(1)◀Сформулируем набор гипотез, на фоне которых наблюдается событие $A = \{$взошёл один росток$\}$. Пусть

$$H_1 = \{\text{морковь взошла}\},\ P(H_1) = 0{,}6,$$

$$H_2 = \{\text{морковь не взошла}\},\ P(H_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

В условиях гипотезы H_1 событие A равносильно тому, что свёкла не взошла, и $P(A/H_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. В условиях гипотезы H_2 для выполнения события A надо, чтобы взошла свёкла; $P(A/H_2) = 0{,}8$. По формуле (2.10)

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)} =$$
$$= \frac{0{,}6 \cdot 0{,}2}{0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8} = \frac{3}{11} \approx 0{,}273.\blacktriangleright$$

Ответ: $\frac{3}{11} \approx 0{,}273$.

(2) ◀ $P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)} =$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}8}{0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8} = \frac{0{,}32}{0{,}44} = \frac{8}{11} \approx 0{,}727.\blacktriangleright$$

Ответ: $\frac{8}{11} \approx 0{,}727$.

Пример 2.16. *В первой урне 5 белых и 8 чёрных шаров, во второй — 7 белых и 6 чёрных. Из каждой урны вынимают по шару. Они оказались разноцветными. Найти вероятность того, что белый шар вынут:* (1) *из первой урны;* (2) *из второй урны.*

◀ Примем

$H_1 = \{$шар, вынутый из первой урны, белый$\}$, $P(H_1) = \frac{5}{13}$,

$H_2 = \{$шар, вынутый из второй урны, белый$\}$, $P(H_2) = \dfrac{7}{13}$,
$A = \{$шары, вынутые из обеих урн, разноцветные$\}$.
Заметим, что $A = H_1 \cdot \bar{H}_2 + \bar{H}_1 \cdot H_2$.

$$(1) \qquad P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P(\bar{H}_2)}{P(H_1) \cdot P(\bar{H}_2) + P(\bar{H}_1) \cdot P(H_2)} =$$

$$= \frac{(5/13) \cdot (6/13)}{(5/13) \cdot (6/13) + (8/13) \cdot (7/13)} = \frac{30}{30+56} = \frac{15}{43} \approx 0{,}349.$$

Ответ: $\dfrac{15}{43} \approx 0{,}349$.

$$(2) \qquad P_A(H_2) = \frac{P(\bar{H}_1) \cdot P(H_2)}{P(H_1) \cdot P(\bar{H}_2) + P(\bar{H}_1) \cdot P(H_2)} =$$

$$= \frac{(8/13) \cdot (7/13)}{(5/13) \cdot (6/13) + (8/13) \cdot (7/13)} = \frac{56}{30+56} = \frac{28}{43} \approx 0{,}651.$$

Ответ: $\dfrac{28}{43} \approx 0{,}651$. ►

Пример 2.17. *В первой урне 9 белых и 7 чёрных шаров, во второй — 5 белых и 8 чёрных. Из каждой урны вынули по шару. Шары оказались одного цвета. Какова вероятность того, что они:*
(1) *белые;* (2) *чёрные?*

◄Пусть $A = \{$оба шара одного цвета$\}$;
$H_1 = \{$оба шара белые$\}$; $H_2 = \{$оба шара чёрные$\}$.
Заметим, что $A = H_1 + H_2$; $P(A/H_1) = P(A/H_2) = 1$;
$P(H_1) = \dfrac{9}{16} \cdot \dfrac{5}{13} = \dfrac{45}{208}$; $\quad P(H_2) = \dfrac{7}{16} \cdot \dfrac{5}{13} = \dfrac{35}{208}$;

$P(A) = P(H_1 + H_2) = P(H_1) + P(H_2) = \dfrac{45}{208} + \dfrac{35}{208} = \dfrac{80}{208}$.

По формуле Бейеса:

(1) $P_A(H_1) = \dfrac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \dfrac{45}{208} : \dfrac{80}{208} = \dfrac{45}{80} = \dfrac{9}{16}$.

Ответ: $\dfrac{9}{16}$.

(2) $P_A(H_2) = \dfrac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \dfrac{35}{208} : \dfrac{80}{208} = \dfrac{35}{80} = \dfrac{7}{16}$.

Ответ: $\dfrac{7}{16}$. ►

Пример 2.18. *В первой урне 8 белых и 7 чёрных шаров, во второй — 4 белых и 6 чёрных, в третьей — 9 белых и 5 чёрных. Наугад из одной из урн вынимается шар. Найти вероятность того, что он белый.*

◀Искомое событие A наблюдается на фоне трёх гипотез:
$H_1 = \{$выбрана первая урна$\}$,
$H_2 = \{$выбрана вторая урна$\}$,
$H_3 = \{$выбрана третья урна$\}$.

Вероятности всех гипотез равны между собой и в сумме составляют 1, откуда $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \dfrac{1}{3}$.

В условиях каждой из них вероятность искомого события A ищется по формуле классического определения вероятности $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

$$P(A/H_1) = \frac{8}{8+7} = \frac{8}{15};\ \ P(A/H_2) = \frac{4}{4+6} = \frac{2}{5};\ \ P(A/H_3) = \frac{9}{9+5} = \frac{9}{14}.$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)$.

Подставим сюда найденные значения:

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{15} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{14} = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{15} + \frac{2}{5} + \frac{9}{14}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{331}{210} =$$
$$= \frac{331}{630} \approx 0{,}525.$$▶

Ответ: $\dfrac{331}{630} \approx 0{,}525$.

2.6. Повторные испытания. Формула Бернулли

Производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых некоторое событие A может наступить или не наступить. Необходимо найти $P_n(m)$ — вероятность того, что событие A произойдет m раз в n испытаниях.

Возможные результаты испытаний будем записывать в виде комбинаций букв A и $\bar{A}$. Например, запись $A\bar{A}A\bar{A}$ означает, что событие A произошло в 1-ом и 3-ем испытаниях и не произошло во 2-ом и 4-0м. Любой набор комбинаций, в которой событие A встречается m раз, а событие $\bar{A}$ встречается $n-m$ раз, назовем благоприятной. Количество благоприятных комбинаций равно количеству способов, которыми можно выбрать m мест из n, чтобы разместить буквы A (буквы $\bar{A}$ на оставшихся местах разместятся однозначно), т.е. числу сочетаний из n элементов по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Вероятности всех таких комбинаций равны и в каждой из них событие A (также, как и $\bar{A}$) происходит одинаковое количество раз. Найдём вероятность комбинации

$$B_1 = \underbrace{AA\ldots A}_{m}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m}\ .$$

В силу независимости испытаний, вероятность данной комбинации вычисляется по формуле (2.7)

$$P(B_1) = p^m q^{n-m},$$

также как и для остальных комбинаций:

$$P(B_2) = \cdots = P(B_k) = p^m q^{n-m},$$

где количество благоприятных комбинаций $k = C_n^m$.

Все благоприятные комбинации B_k являются несовместными, поэтому по теореме сложения:

$$P_n(m) = P(B_1 + \cdots + B_k) = P(B_1) + \cdots + P(B_k) = kp^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Мы вывели ***формулу Бернулли***[3]:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{2.11}$$

Для вычисления вероятности по формуле Бернулли (2.11), в пакет Maxima встроена функция pdf_binomial(m,n,p).

Пример 2.19. *Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна* 0,6. *Какова вероятность того, что при восьми выстрелах будет пять попаданий в цель?*

◀Здесь $n = 8$, $m = 5$, $p = 0{,}6$, $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

По формуле (2.11) получаем:

$$P_8(5) = \frac{8!}{5!(8-5)!} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 \approx 0{,}279.▶$$

Maxima-программа решения данной задачи имеет вид:

```
(%i1) load(distrib);
(%i2) pdf_binomial(5, 8,  0.6);
(%o2) 0.27869184
```

Ответ: $P \approx 0{,}279$.

Можно написать программу которая вычисляет значения вероятностей для всех значений k и построить график функции $P_n(m)$, рис.8.

```
kill(all)$ load(distrib);fpprintprec:4$; n:8$ p:0.6$
P:makelist(pdf_binomial(k, n, p),k,0,n);
plot2d([discrete,P],[x,1,9],[style,points],[gnuplot_postamble,"set grid"])$
(P) [0.000655,0.007864,0.04129,0.1239,0.2322,0.2787,0.209,0.08958,0.0168]
```

Пример 2.20. *В условиях примера 2.19 найти вероятность того, что число попаданий будет не больше* 5 *и не меньше* 3-*х.*

[3]Якоб Бернулли (27.12.1654 – 16.08.1705) – швейцарский математик

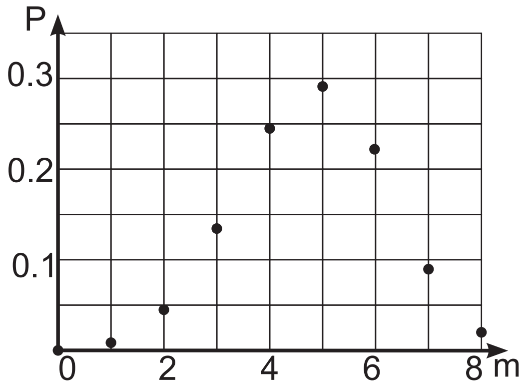

Рис. 8. *К примеру 2.19*

◀Обозначим искомую вероятность $P_8(3 \leqslant m \leqslant 5)$. Эта вероятность в соответствии с формулой (2.11) представляется в виде суммы вероятностей трёх попарно несовместных событий:

$$P_8(3 \leqslant m \leqslant 5) = P_8(3) + P_8(4) + P_8(5).$$

Применяем формулу Бернулли для каждого слагаемого, получаем:
$P_8(3 \leqslant m \leqslant 5) = C_8^3 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^5 + C_8^4 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^4 + C_8^5 \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 \approx$
$\approx 0{,}124 + 0{,}232 + 0{,}279 = 0{,}635.$▶

Maxima-команда имеет вид:
P:sum(pdf_binomial(m, 8, p),m,3,5);

Замечание 2.2. *Формулу (2.8), выведенную выше, можно получить, используя формулу Бернулли. Действительно, по формуле Бернулли получаем:*

$$P(\bar{A}) = C_n^0 p^0 q^n = (1-p)^n \implies P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1-p)^n.$$

Пример 2.21. *В условии примера 2.19 найти вероятность того что при восьми выстрелах будет хотя бы одно попадание в цель.*

◀Найдем вероятность противоположного события $\bar{A}$, т.е. вероятность все восемь выстрелов не попали в цель.

$$P(\bar{A}) = (1-p)^n = 0{,}4^8 \approx 0{,}001 \implies P(A)1 - P(\bar{A}) \approx 0{,}999. \blacktriangleleft$$

Замечание 2.3. *Формулу Бернулли можно обобщить на тот случай, когда в результате каждого опыта возможны не два исхода A и $\bar{A}$, а m различных исходов. Пусть производится n независимых опытов в одинаковых условиях, в каждом из которых может произойти только одно из m независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, причём*

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Тогда вероятность того, что в k_1 опытах появится событие A_1, …, в k_m опытах — событие A_m, при этом $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$, определяется формулой полиномиального распределения

$$P_n(k_1, k_2, \ \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2! \ \ldots k_m!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ \ldots p_m^{k_m}. \tag{2.12}$$

2.7. Наивероятнейшее число появления события A

Часто необходимо знать значение m, при котором вероятность $P_n(m)$ максимальна. Это значение m называется ***наивероятнейшим числом*** (обозначается m^*) наступления события A в n испытаниях.

Можно показать, что

$$np - q \leqslant m^* \leqslant np + p. \tag{2.13}$$

Если неравенству (2.13) удовлетворяют два целых значения m^*, тогда имеется два наивероятнейших числа m_1^* и m_2^*.

Так, в примере 2.19, где $n = 8, p = 0{,}6, q = 0{,}4 \Rightarrow np = 4{,}8$ имеем $4,8 - 0{,}4 \leqslant m^* \leqslant 4{,}8 + 0{,}6$. Этому неравенству удовлетворяет единственное целое значение $m^* = 5$.

Пример 2.22. *Найти наивероятнейшее число выпадений орла при 11 бросаниях монеты.*

◀ Здесь $n = 11$, $p = \dfrac{1}{2}$. В соответствии с неравенством (2.13) получаем:

$$11 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leqslant m^* \leqslant 11 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Этому неравенству удовлетворяют два значения $m_1^* = 5$ и $m_2^* = 6$. Найдём их вероятности:

$$P_{11}(5) = P_{11}(6) = C_{11}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = C_{11}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0{,}226. \blacktriangleleft$$

2.8. Производящие функции

Производящей функцией называется следующая сумма

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k, z \in (0; 1).$$

Для испытаний Бернулли эту функцию можно привести к более простому виду

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k q^{n-k} (pz)^k = (q+pz)^n.$$

Рассмотрим разложение многочлена $(q+pz)^n$ по формуле Бинома Ньютона

$$(q+pz)^n = C_n^0 q^n + C_n^1 q^{n-1} p^1 z + C_n^2 q^{n-2} p^2 z^2 + \ldots + C_n^n q^0 p^n z^n. \qquad (2.14)$$

Можно заметить, что коэффициенты этого многочлена равны вероятностям $P_n(m)$, вычисленным по формуле Бернулли (2.11). Поэтому массив вероятностей $P_n(m)$, вычисленный по формуле Бернулли (2.11), называют *биномиальным распределением*, а функцию $\varphi_n(z) = (q+pz)^n$ — производящей функцией для последовательности независимых испытаний.

Если в каждом из независимых испытаниях вероятности наступления событий разные, то вероятности того, что в n опытах событие A наступит m раз, равна коэффициенту при m-й степени многочлена

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z) \cdots (q_n + p_n z). \qquad (2.15)$$

Функция $\varphi_n(z)$, называется производящей функцией.

Пример 2.23. *Производится три выстрелов по мишени. Вероятность попадания при первом выстреле равно 0,5, а при каждом последующем выстреле производится корректировка прицела, поэтому вероятность попадания увеличивается на 10%. Какова вероятность: а) промаха; б) одного попадания; в) двух попаданий; г) трёх попаданий.*

◀ Подсчитываем вероятности попаданий при каждом выстреле. Для этого используем формулу сложных процентов: $p_k = 0{,}5(1+0{,}1)^k$, $k = 0, 1, 2, 3$. Получаем следующие значения массивов попаданий в цель p и промахов $q = 1 - p$:

$(p)[0.5, 0.55, 0.605]$ $\qquad$ $(q)[0.5, 0.45, 0.395]$

Применяем формулу (2.15) для $n = 3$ и полученных массивов p и q.

$\varphi_3(z) = (0{,}5 + 0{,}5z)(0{,}55z + 0{,}45)(0{,}605z + 0{,}395)$.

После раскрытия скобок получаем

$\varphi_3(z) = 0{,}166375z^3 + 0{,}411125z^2 + 0{,}333625z + 0{,}088875$.

Искомыми вероятностями будут коэффициенты при соответствующих степенях данного многочлена.

$P_3(0) = 0{,}088875$; $P_3(1) = 0{,}333625$; $P_3(2) = 0{,}411125$; $P_3(3) = 0{,}166375$.

Для контроля проверим, что сумма этих вероятностей равна 1.▶

2.9. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

Применение формулы Бернулли при больших значениях числа испытаний n достаточно трудоёмкое занятие и приводят к значительным погрешностям. Локальная теорема Лапласа даёт асимптотическую формулу, позволяющую приближённо найти вероятность появления m раз события A при больших значениях числа испытаний n.

Теорема 2.7 (***Локальная теорема Муавра-Лапласа***). *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появиться m раз в n испытаниях, приближённо равна*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{2.16}$$

Функции $\varphi(x)$, называемой функцией Гаусса , а её график — кривой вероятностей, рис. 9. Значение данной функции можно найти при помощи калькулятора или воспользоваться таблицей приведённой в учебниках по теории вероятностей (см. приложение 1). Данная функция положительная, чётная и имеет быстро стремиться к нулю при убывании от начала координат:

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \varphi(+\infty) = \varphi(-\infty) = 0.$$

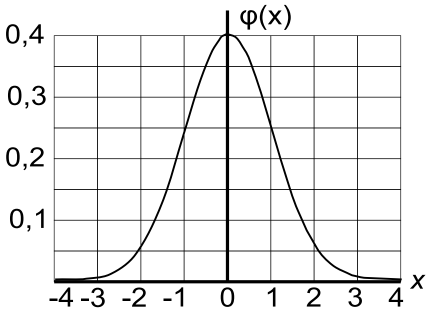

Рис. 9. *График функции Гаусса $\varphi(x)$*

Пример 2.24. *Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна* 0,6. *Найти вероятность того, что* 100 *выстрелов дадут* 50 *попаданий.*

◀По условию $n = 100$, $m = 50$, $p = 0{,}6$. Воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_{100}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}\cdot\varphi\left(\frac{50-100\cdot 0{,}6}{\sqrt{100\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}\right) \approx$$
$$\approx 0{,}2041\cdot\varphi(2,04) \approx 0{,}2041\cdot 0{,}0498 = 0{,}010.$$

Для решения такой трудоемкой задачи можно использовать математические пакеты компьютерных программ.

Рассмотрим решение примера 2.24 в рамках пакета Maxima.

```
(%i1) load(distrib); numer:true;
/*программируем функцию, реализующую локальную теорему
Лапласа*/
(%i2) L_Lapl(m, n, p):=(y:1/sqrt(n*p*(1−p)),
                sqrt2*%pi* exp(−0.5*((m−n*p)*y)^ 2));
/*Вычисляем значение функции при n = 100, m = 50 и p = 0,6*/
(%i2) PL:L_Lapl(50, 100, 0.6);
(%o2) 0.01014
```

В первой строке производится загрузка библиотеки distrib. В этой библиотеке собраны многочисленные функции, предназначенные для решения задач теории вероятностей и математической статистики. Во второй строке программируется формула реализующая локальную теорему Лапласа, а в третьей строке вычисляется значение вероятности по этой формуле.

Отметим, что Функцию pdf_binomial, вычисляющую вероятность по формуле Бернулли, можно применять и при очень больших значениях числа испытаний. Используем формулу Бернулли для нашей задачи:

```
/*Решаем пример 2.24 используя точную формулу Бернулли*/
(%i3) PB:pdf_binomial(50, 100, 0.6);
(%o3) 0.010338
(%i4) PB−PL;
(%o4) 1.9783067 * 10^−4
```

Таким образом, точность локальной теоремы Лапласа для примера 2.24 $\approx 0{,}0002$.

$dLapl(50, 100, 0.6) = 0.01$

Для вычисления суммарной («интегральной») вероятности того, что число появлений события A находится в заданных пределах (см. пример 2.25) при больших n также используется асимптотическая формула, позволяющая вычислять эту вероятность приближённо.

Для пользования этой формулой познакомимся с функцией Лапласа.

Определение 2.4. *Функцией Лапласа* $\Phi(x)$ *называется:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{2.17}$$

Приведём основные свойства функции Лапласа:

(1) $\Phi(x)$ непрерывная, монотонно возрастающая функция.

(2) Определена для всей действительных чисел, $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

(3) $\Phi(0) = 0$.

(4) Функция нечётная, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

(5) $\Phi(+\infty) = 0{,}5, \quad \Phi(-\infty) = -0{,}5$.

Примем первые два свойства без доказательства. Третье свойство следует из свойства определённого интеграла, $\int\limits_0^0 f(t)dt = 0$.

$$\Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.$$

Для доказательства четвёртого свойства произведём замену переменных в определённом интеграле:

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left\langle \begin{array}{c} t = -u \\ dt = -du \end{array} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = -\Phi(x).$$

Пятое свойство вытекает из известного равенства для интеграла Пуассона:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} \implies \Phi(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{в силу чётности подынтегральной функции.}$$

Значения функции Лапласа также имеются в таблицах в учебниках по теории вероятностей (см. приложение 2) и вычисляются в математических и статистических программах для компьютеров (например, в EXCEL, Maxima, MathCad, MathLab).

Теорема 2.8 (***Интегральная теорема Лапласа***). *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ того, что событие A появится не менее m_1, но не более m_2 раз в n испытаниях приближённо равна (при $n \to \infty, \; p \not\approx 0, p \not\approx 1$):*

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{2.18}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа.

Теоремы 2.7 и 2.8 примем без доказательства.

В пакетах Maxima и MathCad для вычисления функции Лапласа применяется функция cdf_normal(x,a, σ) и pnorm(x,a, σ), соответственно, которые определяют функцию распределения для нормального закона равную интегралу $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$

Тогда функция Лапласа вычисляется по формуле:
$\Phi(x) = cdf\_normal(x, 0, 1) - 0{,}5$ в пакета Maxima и
$\Phi(x) = pnorm(x, 0, 1) - 0{,}5$ – в пакете MathCad.

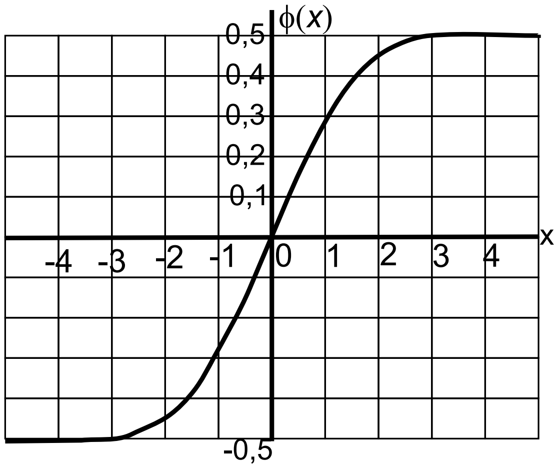

Рис. 10. *Функция Лапласа (2.17)*

Используя пакет Maxima, нарисуем график функции Лапласа, рис. 10.

```
numer:true$ load(distrib)$
Phi(x):= cdf_normal(x,0 , 1 )-0.5;
plot2d([Phi(x)], [x,-4,4], [gnuplot_postamble, "set grid;"])$
```

Пример 2.25. *Фабрика выпускает* 40% *продукции высшего качества составляет. Найти вероятности того, что в партии из 300 отобранных изделий высшего качества окажется: а) от* 110 *до* 140 *изделий, б) не менее* 110 *изделий, в) не более* 109 *изделий.*

Используем интегральную теорему Лапласа 2.18.
Здесь $n = 300,\ p = 0{,}4,\ q = 0{,}6$.

а) ◀Найдем аргументы x_1 и x_2 функции Лапласа при $m_1 = 110$ и $m_2 = 140$:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = -\frac{5}{3\sqrt{2}} \approx -1{,}18,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{140 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}36.$$

Тогда

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx \Phi(2{,}36) - \Phi(-1,18) \approx 0{,}491 + 0{,}381 = 0{,}872.$$

Эта вероятность оказалась довольно высокой вследствие того, что были просуммированы вероятности вблизи наивероятнейшего числа $m^* = 120$.▶

б)◀В этой части задачи нужно положить $m_1 = 110$, а $m_2 = 300$. Значение x_1 было найдено в пункте а, другой параметр

$$x_2 = \frac{300 - 120}{\sqrt{72}} = \frac{180}{6\sqrt{2}} \approx 21{,}21.$$

Соответствующая вероятность

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx \Phi(21{,}21) - \Phi(-1{,}18) \approx 0{,}5 + 0{,}381 = 0{,}881. \blacktriangleleft$$

в) ◀Так как сумма вероятностей

$$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \quad \text{и} \quad P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300)$$

равна 1, то

$$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) = 1 - P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 1 - 0{,}881 = 0{,}119. \blacktriangleleft$$

Ответ: $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx 0{,}872$; $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 0{,}881$; $P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \approx 0{,}119$. ▶

2.10. Формула Пуассона

Если вероятность p появления события A в испытании Бернулли близка к 0 или 1, то теоремы 2.7 и 2.8 дают большие погрешности и, следовательно неприменимы. В этом случае следует пользоваться приближённой формулой Пуассона для вычисления $P_n(m)$ при больших n.

Теорема 2.9. *Если число испытаний неограниченно увеличивается* $(n \to \infty)$ *и вероятность* p *появления события* A *в каждом из* n *независимых испытаний неограниченно уменьшается* $(p \to 0)$, *но так, что произведение* np *является постоянной величиной* $(np = \lambda)$, *то вероятность* $P_n(m)$ *удовлетворяет предельному равенству*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}. \tag{2.19}$$

Выражение (2.19) называется ***асимптотической формулой Пуассона***.

Из данной теоремы вытекает ***формула Пуассона*** (2.20)

Следствие. *Если вероятность* p *появления события* A *в каждом из* n *независимых испытаний постоянна и близка к нулю, а* n *велико, то вероятность* $P_n(m)$ *того, что событие* A *появится* m *раз в* n *испытаниях приближённо равна (при* $n \to \infty,\ p \to 0,\ \lambda = np \to a$*):*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \tag{2.20}$$

Замечание 2.4. *Случай, когда* $p \approx 1$, *сводится к рассмотренному, если вместо* $P_n(m)$ *вычислять равную ей вероятность* $P_n(n-m)$ *появления* $n-m$ *раз противоположного события* $\bar{A}$, *вероятность появления которого в одном испытании* $q = 1 - p \approx 0$.

Пример 2.26. *Вероятность появления опечатки на одной странице книги равна* 0,01. *Найти вероятность того, что в книге из* 100 *страниц имеется более одной опечатки.*

◀Найдём вероятность противоположного события, т.е. вероятность $P(\bar{B})$ того, что в книге не более одной опечатки (0 или 1 опечатка).

Так как $np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$, то

$$P(\bar{B}) = P_{100}(0) + P_{100}(1) \approx \frac{1^0}{0!}e^{-1} + \frac{1^1}{1!}e^{-1} \approx 0{,}736.$$

Искомая вероятность равна $P(B) \approx 1 - 0{,}736 = 0{,}264$.▶

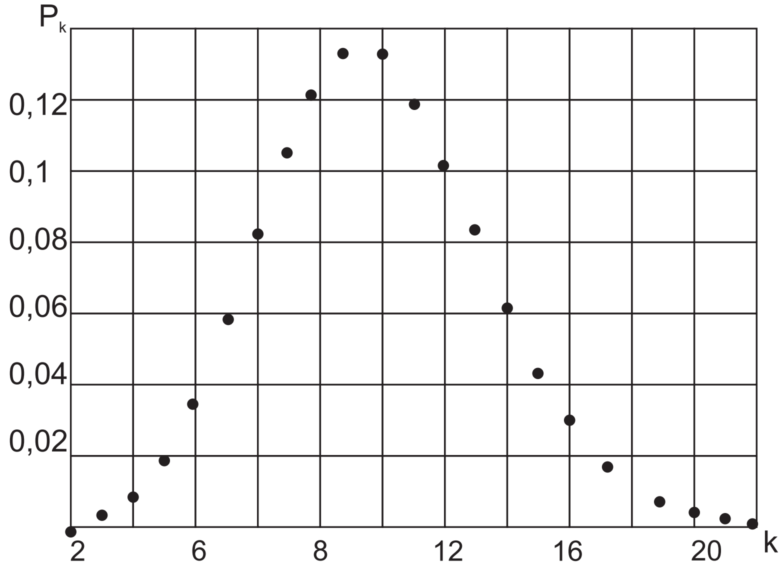

Рис. 11. *К примеру 2.27*

Пример 2.27. *На предприятии изготовлено 100000 деталей. Вероятность, что деталь может оказаться бракованной, равна* 0,0001. *Найти вероятность, а) что ровно три детали будут бракованными; б) что более 20 деталей окажутся бракованными.*

◀а) Используя пакет Maxima, решим данную задачу по трём формулам: точной формуле Бернулли (PB) и приближённым формулам (2.16) (PL – локальной теореме Лапласа) и (2.20) (PP — формуле Пуассона).
n:100000$ m:3$p:0.0001$ q:1-p$ L:n*p;
PB:binomial(n,m)*p^m*q^(n-m);
(PB) 0.007564914689311556
npq:sqrt(L*q);
x:(m-L)/npq;
PL:1/(npq*sqrt(2*%pi))*exp(-x^2/2);
(PL) 0.01088438482539428
PP:L^m*exp(-L)/m!;
(PP) 0.007566654960414142
По формуле Пуассона (PP= 0.010884) получили близкие к точным результатам PB=0.0075649, полученным по формуле Бернулли. Локальная теорема Лапласа дала неприемлемые результаты (PL=0.01088.)

Решим теперь задача б). Найдём теперь сумму вероятностей
(%i14) S:1-sum(P[k],k,1,21);
(S) 0.001587

Построим график изменения вероятностей от числа бракованных деталей k, рис.11. Из графика видно, что число бракованных деталей, расположено в диапазоне от 2 до 20.

P:makelist(binomial(n,k)*p^k*q^(n-k),k,0,25);
plot2d ([discrete, P],[x,2,22],[style,points], [gnuplot_postamble, " set grid"])$ ▶

2.11. Отклонение частоты от вероятности

Проводятся независимые испытания с постоянной вероятностью p появления события A в каждом из них, при этом событие A появилось m раз в n испытаниях. Найдем вероятность того, что отклонение относительной частоты $\dfrac{m}{n}$ от вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа ε, т.е. найдем $P\left\{\left|\dfrac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right\}$.

Раскрывая в неравенстве модуль, приводим его к виду $m_1 < m < m_2$ и применяем интегральную теорему Лапласа 2.8. Получаем:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right\}=P\left\{-\varepsilon\leqslant\frac{m}{n}-p\leqslant\varepsilon\right\}=$$
$$=P\left\{np-n\varepsilon\leqslant m\leqslant np+n\varepsilon\right\}\approx\Phi\left(\frac{np+n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)-$$
$$-\Phi\left(\frac{np-n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)=\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

В последнем равенстве мы воспользовались нечётностью функции Лапласа. Итак, мы получили, что при $n\to\infty$, $p\not\approx 0$, $p\not\approx 1$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right\}\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{2.21}$$

Пример 2.28. *Вероятность того, что деталь выпущенная автоматом бракованная* $p=0{,}1$. *Определить, сколько деталей нужно отобрать для проверки, чтобы с вероятностью* 0,9544 *можно было утверждать, что относительная частота бракованных деталей отличается от вероятности* p *по абсолютной величине не более, чем на* 0,03.

◀Здесь $p=0{,}1$; $q=0{,}9$; $\varepsilon=0{,}03$;

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-0{,}1\right|\leqslant 0{,}03\right\}=0{,}9544.$$

Найдём n. По формуле (2.21):

$$2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{n}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right)=0{,}9544\implies\Phi(0{,}1\cdot\sqrt{n})=$$
$$=0{,}4772\implies 0{,}1\sqrt{n}=2\implies n=400.$$

Полученный результат означает, что в партии из 400 деталей количество m бракованных будет с вероятностью близкой к 1 заключено в пределах от $400\cdot 0{,}1-400\cdot 0{,}03=28$ до $400\cdot 0{,}1+400\cdot 0{,}03=52$.▶