Лекция 1. Случайные события

Случайные события. Аксиомы вероятностей. Вероятностные схемы. Классическое и статистическое определения вероятности. Действия над событиями. Элементы комбинаторики и применение их для нахождения вероятностей случайных событий. Задача о выборке. Геометрическое определение вероятности. Задача о встрече.

1.1. Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей является одним из разделов математики, посвящённым изучению закономерностей в случайных явлениях. Математическая статистика, является разделом теории вероятностей и занимается оценкой характеристик этих закономерностей на основании опытов и наблюдений.

Целью применения методов теории вероятностей не является изучение отдельного случайного по законам и формулам, что сложно и иногда невозможно, а установить законы, проявляющиеся в массе этих явлений.

1.2. Операции над случайными событиями

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие ***случайного события***.

В учебниках для студентов математических специальностей теория вероятностей основывается на базе аксиом теории вероятностей А.Н. Колмогорова и в качестве определения случайного события приводится следующее определение.

Определение 1.1. ***Случайное событие*** *это подмножество множества исходов случайного эксперимента.*

Далее вводится понятие вероятностного пространства, и строиться математически строгая теорию вероятностей.

Вероятностное пространство.

Рассматривается конечное или счётное множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \leqslant +\infty$. Каждому из элементов ω_i любой природы, ставится в соответствие неотрицательное число P_i, такое, что $\sum\limits_{i=1}^{N} P_i = 1$. Элементы ω_i называются элементарными исходами.

Случайное событие это любое подмножество A множества Ω, $A \subset \Omega$.

Например: $A = \varnothing, A = \{\omega_1\}, A = \{\omega_2, \omega_7\}, A = \Omega$.

Вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P_i.$$

Для студентов технических учебных заведений, в учебных программах которых нет таких математических дисциплин как: алгебра, функциональный анализ, теория множеств, чаще всего даётся более простое определение случайного события.

Определение 1.2. *Явление, которое может произойти или не произойти при осуществлении некоторого комплекса условий, называется* ***случайным событием***.

Случайные события будем обозначать большими латинскими буквами: A,B,C,..., X, Y, Z.

Всякое осуществление комплекса условий, при которых изучается конкретное случайное событие, будем называть опытом или *испытанием*.

Рассмотрим некоторые классические для теории вероятностей примеры случайных событий.

Пример 1.1. *Испытание: однократное бросание монеты.*
Элементарные исходы:
ω_1 *— выпадение «орла»,* ω_2 *— выпадение «решки».*
Возможные случайные события:
$A = \varnothing, A = \{\omega_1\}, A = \Omega = \{\omega_2\}, A = \{\omega_1 \text{ или } \omega_2\}$.

Пример 1.2. *Испытание: бросание двух монет.*
Элементарные исходы такие же как в примере 1.1.
Возможные события: $A_1 = \{\omega_1,\ \omega_1\}$ *— выпадение двух «орлов»,*
$A_2 = \{\omega_2,\ \omega_2\}$ *— выпадение двух «решек»,*
$A_3 = \{\omega_1,\ \omega_2\}$ *— выпадение «орла» и «решки».*

Пример 1.3. *Испытание: однократное бросание игральной кости (кубика с пронумерованными от 1 до 6 гранями).*
Элементарные исходы:
ω_i *— выпадения грани с цифрой* i. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.
Примеры возможных событий данного испытания:
$C = \omega_1$ *— выпадение числа 1,* $D = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ *— выпадение чётного числа,* $E = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ *— выпадение нечётного числа,* $F = \Omega$ *— выпадение числа, меньшего 7,* $G = \varnothing$ *— выпадение числа, большего 6.*

Пример 1.4. *Испытание: покупка одного лотерейного билета.*
Возможные события: H *— на билет выпал выигрыш,* K *— билет оказался без выигрыша.*

Пример 1.5. *Испытание: проверка исправности прибора.*
Возможные события: L *— выбранный прибор исправен,* M *— выбранный прибор не исправен.*

Пример 1.6. *Испытание: вынимание одного шара из урны.*

В урне (непрозрачный закрытый ящик) имеются шары разных цветов, например — белые и чёрные. Случайным образом вынимается один шар.

Возможные события: N — вынутый шар белый, P — вынутый шар чёрный.

Определение 1.3. *Событие называется **достоверным** (в дальнейшем Ω), если оно обязательно появится в результате данного испытания.*

*Событие называется **невозможным** (в дальнейшем $\varnothing$),если оно не может появится в результате данного испытания.*

Замечание 1.1. *Часто в литературе достоверное событие обозначают буквой U, а невозможное — V.*

Определение 1.4. *Два события A и B называются **несовместными**, если они не могут появиться в одном испытании. Если событий больше двух, они могут быть попарно несовместными, если любые два из них несовместны.*

***Противоположным** событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее в не появлении события A.*

В приведённых выше примерах событие F является достоверным, G — невозможным, события A и B несовместны, также, как H и K. Событие B является противоположным к A: $B = \overline{A}$.

Очевидно, что события A и $\overline{A}$ несовместны.

Определение 1.5. ***Суммой** двух событий $A + B$ называется событие C, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.*

Т.е. наступает событие A или B или оба одновременно.

Определение 1.6. ***Произведением** двух событий $A \cdot B$ называется событие, состоящее в наступлении каждого из этих событий.*

Т.е. наступают оба события одновременно.

Аналогично определяется сумма и произведение для случая, когда число слагаемых или сомножителей больше двух.

Пример 1.7. *Испытание: из колоды, состоящей из 36 карт, случайным образом извлекается одна карта.*
Элементарные исходы: $\Omega = \{\omega_i | i = \{1, \ldots, 36\}\}$. События: R — появление дамы, S — появление карты красной масти.

Тогда событие $R{\cdot}S$ — появление дамы красной масти, $R{+}S$ — появление карты красной масти, или любой дамы.

Нетрудно доказать, что операции над событиями обладают следующими свойствами.

$$
\begin{gathered}
A+B=B+A, \qquad A\cdot B=B\cdot A,\\
A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C,\\
A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C=A\cdot B\cdot C,\\
A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,\\
A+\Omega=\Omega, \qquad A\cdot\Omega=A,\\
A+\varnothing=A, \qquad A\cdot\varnothing=\varnothing,\\
A+\overline{A}=\Omega, \qquad A\cdot\overline{A}=\varnothing,\\
\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}, \qquad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}.
\end{gathered}
$$

Замечание 1.2. *В соответствии с определением 1.3 события A и B несовместны $\iff$ $A\cdot B=\varnothing$.*

Замечание 1.3. *В группе попарно несовместных событий одновременное наступление любых из этих событий невозможно, т.е. они несовместны.*

Определение 1.7. *n событий: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют* ***полную группу****, если в результате испытания обязательно появится одно из них.*

Следовательно,

$$A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega.$$

Отметим, что события A и $\bar{A}$ несовместны и образуют полную группу.

1.3. Относительная частота и её свойства

Рассмотрим N одинаковых испытаний, в каждом из которых может появиться некоторое событие A.

Определение 1.8. *Пусть в N испытаниях событие A появилось M раз.* ***Относительной частотой*** *или просто частотой события A в данной серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу испытаний:*

$$P^*(A) = \frac{M}{N}. \tag{1.1}$$

Пример 1.8. *Если игральная кость бросалась 10 раз ($N = 10$), а шестёрка выпадала 3 раза ($M = 3$), то частота события A (появления шестёрки) равна $P^*(A) = 3/10 = 0,3$.*

Относительная частота $P^*(A)$ обладает следующими свойствами:

(1) $0 \leqslant P^*(A) \leqslant 1$.

(2) $P^*(\Omega) = 1, \quad P^*(\varnothing) = 0$.

(3) Для несовместные событий A и B.

$$P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B). \tag{1.2}$$

Выведем эти свойства.

Свойства 1 и 2 получаются непосредственно из определения 1.8.

Для доказательства свойства 3 обозначим M — число появлений события A, L — число появлений события B, N — общее число проведённых испытаний. Тогда: $P^*(A) = \dfrac{M}{N}, \quad P^*(B) = \dfrac{L}{N}, \quad P^*(A + B) = \dfrac{M + L}{N}$, если события A и B несовместны.

Отсюда следует свойство 3:

$$P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B).$$

Замечание 1.4. *Свойство 3 иногда называют* ***теоремой сложения частот****. В общем виде, для любых событий A и B относительная частота суммы двух событий равна сумме их частот минус частота их произведения:*

$$P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B) - P^*(A \cdot B). \tag{1.3}$$

Доказательство. Пусть событие A появилось в M, а событие B в L испытаниях из N, а одновременно события A и B (т.е. A·B) в K испытаниях, (см. рис. 3). Очевидно:

$$P^*(A+B) = \frac{M+L-K}{N} = \frac{M}{N} + \frac{L}{N} - \frac{K}{N} = P^*(A) + P^*(B) - P^*(A \cdot B).$$

В некоторых случаях возникает необходимость рассматривать несколько событий в их взаимосвязи, например, когда необходимо определить как влияет появление или не появление одного события на частоту другого. В этом случае, кроме частоты события A во всей серии испытаний, вычисляют также частоту события A, учитывая только те испытания, в которых появилось другое интересующее нас событие B. Иными словами, перед определением частоты события A учитывают только те испытания, в которых кроме A появилось и B. Эта характеристика называется *условной частотой* события A при условии появления B и обозначается $P^*(A/B)$ или $P^*_B(A)$.

Определение 1.9. *Условной частотой события A при условии появления B $P^*(A/B) = P^*_B(A)$ называется отношение числа испытаний, в которых появились оба события A и B, к числу испытаний, в которых появилось событие B.*

Если в N испытаниях событие B появилось L раз, а событие A появилось совместно с событием B K раз, то

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L}\ , \tag{1.4}$$

$$P^*(B) = \frac{L}{N}\ , \tag{1.5}$$

$$P^*(AB) = \frac{K}{N}\ . \tag{1.6}$$

Из формул (1.4) — (1.6) вытекает следующая теорема:

Теорема 1.1 (***умножения частот***)**.** *Относительная частота произведения двух событий равна произведению условной частоты одного из них при условии появления другого на относительную частоту другого события:*

$$P^*(AB) = P^*(B) \cdot P^*(A/B). \tag{1.7}$$

Если сомножителей несколько, то:

$$\begin{aligned} P^*(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = P^*(A_1) \cdot P^*(A_2/A_1) \cdot P^*(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdots \\ \cdots P^*(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdots A_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Сравнивая условные частоты $P^*(A/B)$ и $P^*(A/\overline{B})$, можно судить о взаимосвязи событий A и B. Если

$$P^*(A/B) = P^*(A/\overline{B}) = P^*(A)\ , \tag{1.9}$$

то частота события A не зависит от того, произошло или не произошло событие B. Это будет справедливо для так называемых «независимых событий» A и B, для которых условные частоты (1.9) равны частоте $P^*(A)$, которую можно назвать безусловной.

Для независимых событий формула (1.7) примет вид

$$P^*(AB) = P^*(A) \cdot P^*(B) \ , \tag{1.10}$$

а вместо (1.8) имеем формулу:

$$P^*\Big(\prod_{i=1}^{k} A_i\Big) = \prod_{i=1}^{k} P^*(A_i). \tag{1.11}$$

1.4. Статистическое определение вероятности

При небольшом числе испытаний частота может сильно колебаться и является поэтому плохой характеристикой случайного события. Однако, по мере увеличения числа испытаний частота постепенно стабилизируется, т.е. принимает значения, мало отличающиеся от некоторого вполне определённого числа, то есть чем больше число испытаний, тем реже будут встречаться значительные отклонения этой частоты от этого числа. Таким образом, с рассматриваемым событием можно связать некоторое число, около которого группируются частоты и которое является мерой объективной возможности появления данного события. Это число называется *вероятностью* события. В некоторых учебниках это называется *статистическим* определением вероятности.

Свойство устойчивости частот, многократно проверенное экспериментально и подтверждающееся всем опытом практической деятельности людей, есть одна из наиболее характерных закономерностей, наблюдаемых в случайных явлениях.

Характеризуя вероятность события каким-то числом, мы не можем придать этому числу иного реального значения и иного практического смысла, чем относительная частота события при большом числе испытаний. Свойства так определённой вероятности должны быть аналогичны приведённым в пункте 1.3 свойствам относительной частоты. Численная оценка степени возможности события посредством вероятности имеет практический смысл именно потому, что более вероятные события происходят в среднем чаще, чем менее вероятные.

Проверить такое предположение мы можем только для таких событий, вероятности которых можно вычислить другим путем (непосредственно). Многочисленные опыты, производившиеся со времен возникновения теории вероятности, подтверждают это предположение. Так, при большом N частота появления, например, цифры 6 на верхней грани игральной кости, близка к $1/6$, а частота появления «орла» при бросании монеты близка к 0,5.

Классическим примером, подтверждающим указанный принцип, являются приведенные в таблице 1.1 результаты опытов с многократным подбрасыванием монеты, выполненных Ж.Бюффоном[1] и К. Пирсоном[2].

Как видно, при большом числе испытаний относительная частота появления случайного события может рассматриваться как приближённое значение вероятности события A.

Как видно, при большом числе испытаний относительная частота появления случайного события $P^*(A)$ может рассматриваться как приближённое значение вероятности события A.

Таблица 1.1

Опыты	n	m	$P^*(A)$
Бюффона	4040	2048	0,5080
К.Пирсона	12000	6019	0,5016
К.Пирсона	24000	12012	0,5005

[1] Бюффон Жорж Луи Леклерк (07.09.1707 – 16.04.1788) - французский естествоиспытатель.

[2] Пирсон Карл (27.03.1857 – 27.04.1936) – английский математик

1.5. Классическое определение вероятности

В приложениях теории вероятностей имеются задачи, в которых вероятность вычисляется с помощью классической формулы. Это задачи, в которых количество (N) элементарных исходов $\omega_i, i = 1, 2, \ldots, N$ конечно и при этом результаты опытов являются равновозможными.

В этом случае пространство элементарных исходов имеет вид

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_1, \ldots, \omega_N\}. \tag{1.12}$$

Рассмотрим теперь множество $\mathcal{F}$ подмножеств множества элементарных событий Ω.

$\mathcal{F} = \Big\{\varnothing, \omega_1, \ldots, \omega_N, \{\omega_1, \omega_2\}, \ldots, \{\omega_1, \omega_N\}, \ldots, \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}\Big\}.$

Согласно определению 1.1, каждый элемент данного множества является случайным событием.

Определение 1.10. *Элементарные исходы, при появлении которых интересующее нас событие наступает, назовем исходами,* ***благоприятствующими*** *данному событию.*

Так, при бросании игральной кости событию A: «выпало более четырёх очков» благоприятствуют два элементарных исхода — выпадение чисел пять или шесть.

Таким образом, событие A наблюдается, если в испытании наступает один из элементарных исходов, благоприятствующих ему.

Будем рассматривать *равновозможные* элементарные события, образующие *полную группу попарно несовместных событий.*

Определения последних двух терминов приведены выше, что же касается равновозможности, то, как правило, это свойство элементарных событий очевидно вытекает из их «равноправности». Так, например, если игральная кость симметричная, то выпадение любого числа очков от 1 до 6 равновозможно.

Описанная схема носит название схемы случаев, а сами элементарные события, обладающие перечисленными свойствами, называются случаями. Вычисление вероятности по формуле (1.13) верно только для схемы случаев, которая неприменима, например, если число возможных исходов бесконечно. Формула (1.13) во многих учебниках по теории вероятностей называется «***классическим определением вероятности***».

Вероятность события равна отношению числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех исходов данного испытания:

$$P(A) = \frac{M}{N}, \tag{1.13}$$

где M — число элементарных исходов, благоприятствующих событию A; N — число всех равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу событий.

В теории множеств число $N = |\Omega|$ называется мощностью множеств Ω.

Из этой формулы вытекают следующие свойства вероятности, аналогичные свойствам относительной частоты событий $P^*(A)$:

Вероятность случайного события A является действительным числом принимающим любые значения от 0 до 1:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1. \tag{1.14}$$

Действительно, для любого события $0 \leqslant M \leqslant N$, поэтому: $0 \leqslant M/N \leqslant 1$.

Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(\Omega) = 1. \tag{1.15}$$

Действительно, в случае достоверного события $M = N$ и $P(\Omega) = N/N = 1$.

Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\varnothing) = 0. \tag{1.16}$$

Докажем очень важное свойство которое называется: «Теорема сложения вероятностей для несовместных событий».

Теорема 1.2. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей :*

$$P(A + B) = P(A) + P(B), \text{ если } A \cdot B = \varnothing. \tag{1.17}$$

Обозначим M — число исходов, благоприятствующих появлению события A, L — число исходов, благоприятствующих появлению события B, N — число исходов данного испытания. Тогда:

$$P(A) = \frac{M}{N}, \quad P(B) = \frac{L}{N}, \quad P(A + B) = \frac{M + L}{N},$$

если события несовместны. Отсюда следует равенство (1.17):

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Непосредственным следствием доказанной теоремы сложения вероятностей для несовместных событий является следующая теорема:

Теорема 1.3. *Вероятность противоположного к A события равна единице минус вероятность события A:*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{1.18}$$

Так события A и $\overline{A}$ несовместны, а их сумма есть достоверное событие: $A \cdot \overline{A} = \emptyset,\ A + \overline{A} = \Omega$, следовательно:

$$1 = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \implies P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

С помощью классического определения вероятности можно вычислить вероятности в тех задачах, где применима схема случаев.

Пример 1.9. *Найти вероятность того, что при однократном бросании игральной кости выпадает чётное число очков.*

◀ В соответствии с классическим определением вероятности $P(A) = \dfrac{M}{N}$. В данном примере общее число возможных исходов $N = 6$, количество исходов, благоприятствующих наступлению события $A\{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \}$, $M = 3$ (это выпадение 2, 4 и 6 очков). Окончательно

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5. \blacktriangleright$$

Ответ: $P(A) = 0{,}5$.

Пример 1.10. *Шифрзамок состоит из 4-х колёсиков по 10 цифр на каждом. Найти вероятность открыть замок с первой попытки при случайном наборе шифра.*

◀Общее число возможных комбинаций из 4-х цифр $N = 10^4$ — все числа от 0000 до 9999. $\Omega = \{0000, 0001, \ldots, 9999\}$, $N = |\Omega| = 10000$. Благоприятствующих исходов — один, $M = 1$.▶

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{10^4} = 0{,}0001$.

Пример 1.11. *Найти вероятность того, что при случайном выборе карты из колоды в 36 карт появится дама.*

◀Общее число возможных исходов $N = 36$, благоприятствующих исходов — четыре: $M = 4$.

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111. \blacktriangleright$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{9}$.

1.6. Понятие об аксиоматике теории вероятностей

Логически завершенная современная теория вероятностей основывается на аксиоматике, предложенной выдающимся советским математиком А.Н.Колмогоровым в 1936г. и включает в себя как частный случай «классическое определение вероятности».

Вероятностное пространство

Совокупность различных исходов (результатов) испытаний описывается множеством Ω, элементы которого $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ называются элементарными событиями. Поскольку изучаемые в теории вероятностей события составляются из этих элементарных событий, они будут являться подмножествами Ω. Таким образом, наряду с Ω, рассматривается множество $\mathcal{F}$ подмножеств Ω.

Определение 1.11. *Множество $\mathcal{F}$ называется σ-**алгеброй**, если выполнены следующие требования:*

1) $\Omega \in \mathcal{F}, \quad \varnothing \in \mathcal{F}$;

2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$;

3) $A \in \mathcal{F}, \quad B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \bigcup B \in \mathcal{F}, \quad A \bigcap B \in \mathcal{F}$;

4) $A_n \in \mathcal{F}$ для $n = 1, 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}, \quad \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Элементы множества $\mathcal{F}$ в этом случае называются случайными событиями. В теории вероятностей в отличие от теории множеств принята специфическая терминология:

Ω — достоверное событие, $\omega \in \Omega$ — элементарное событие, $A \bigcup B = A + B, A \bigcup B = A \cdot B$, $\overline{A}$ — событие, противоположное к A, $\varnothing$ — невозможное событие, $A \bigcap B = \varnothing \Rightarrow$ несовместные события, $A \subset B \Rightarrow$ событие A благоприятствует наступлению события B.

Аксиомы вероятности.

1. Каждому случайному событию $A \in \mathcal{F}$ поставлено в соответствие неотрицательное число $P(A)$, называемое его вероятностью (вероятностная мера).

2. $P(\Omega) = 1$.

3. Если события $A_1, A_2, \cdots, A_n$ попарно несовместны, то для конечной суммы $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

4. Если события $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ попарно несовместны, то для бесконечной суммы $P\left(\sum\limits_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$.

5. Если события $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ такие, что
$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \varnothing$, то: $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$.

Из этих аксиом выводятся все теоремы теории вероятностей.

Множество элементарных событий Ω с заданной на нём σ-алгеброй $\mathcal{F}$ и определённой на неотрицательной мерой $P(A)$, называется ***вероятностным пространством*** и обозначается $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$.

Из этих аксиом выводятся уже известные нам свойства:

$$P(\varnothing) = 0,\ 0 \leqslant p(A) \leqslant 1,\ p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

и все остальные теоремы теории вероятностей.

Для схемы случаев вычисление вероятности сводится к уже известному классическому определению вероятности. Такое построение позволило получить строгий математический подход и решать любые задачи, относящиеся к сфере действия теории вероятностей.

1.7. Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям в которых элементарные исходы опыта не равновозможны и когда число элементарных исходов бесконечно. Задачи связанные с такими испытаниями, сводятся к случайному бросанию точки в некоторую область Ω.

Пусть задано некоторое измеримое множество Ω, такое, что его мера $\mu(\Omega) > 0$. Все точки этого множества $M \in \Omega$ и все измеримые подмножества множества Ω составляют множество событий $\mathcal{F}$, которое является σ-алгеброй. Предполагая, что вероятность попадания случайной точки в подобласть A, не зависит ни от ее формы, ни от её расположения в области Ω, а пропорциональна его мере $\mu(A)$.

Определим вероятность события A, состоящего в попадании случайной точки в заданную подобласть, как отношение мер областей:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \tag{1.19}$$

Формулу 1.19 можно применять для любого метрического пространства. В нашем компактном курсе, мы будем рассматривать задачи которые сводятся к одномерному, двумерному или трёхмерному геометрическому пространству изучаемому в курсе линейная алгебра и аналитическая геометрия.

Определённая таким образом вероятность называется ***геометрической вероятностью***.

Пример 1.12. *Случайным образом выбраны два положительных числа не превышающих значение 5. Найти вероятность того, что сумма этих чисел будет больше 5, а сумма их квадратов меньше 25?*

◀Используем геометрическое определение вероятности. Так как числа x и y берутся из интервала $(0, 5)$, можно считать, что случайным образом выбирается точка внутри квадрата $0 < x, y < 5$. При этом $x+y > 5$ и $x^2+y^2 < 25$. Изобразим области на рис. 1.

Площадь квадрата, в котором выбирается точка, равна $S_\Omega = 25$.

Область G, в которую должна попасть точка, задана системой неравенств:

$\begin{cases} y > 5 - x, \\ y < \sqrt{25 - x^2}, \\ x \in [0, 5]. \end{cases}$ На рис. 1, она выделена.

$S_G = \dfrac{\pi \cdot 5^2}{4} - 0{,}5 \cdot 5^2 = \dfrac{25(\pi - 2)}{4}$.

$P(A) = \dfrac{S_G}{\Omega} = \dfrac{25(\pi - 2)}{4}/25 = \dfrac{\pi - 2}{4} \approx 0{,}285.$▶

Ответ: $P(A) = \dfrac{\pi - 2}{4} \approx 0{,}285.$

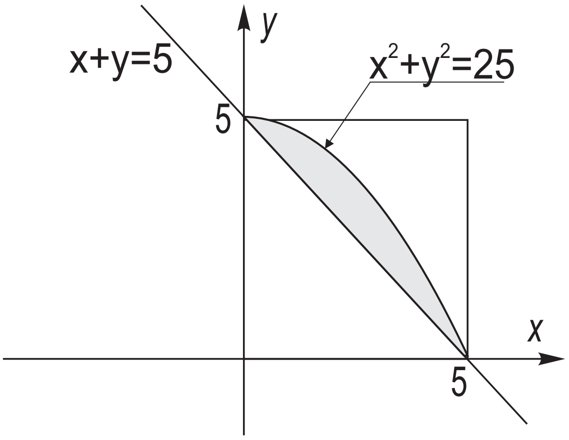

Рис. 1. *К примеру 1.12*

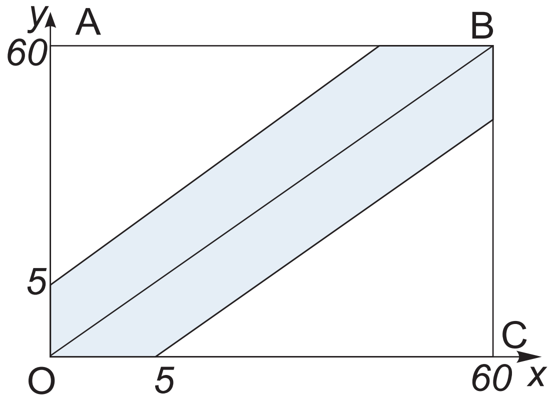

Рис. 2. Задача о встрече

Пример 1.13. *Два друга решили встретиться на автобусной остановке с 14:00 до 15:00 часов, при этом договорились ожидать только в течение 5 минут. Какова вероятность встречи друзей?*

◀Обозначим за x и y время прихода первого и второго друга, соответственно, $0 \leqslant x, \quad y \leqslant 60$ (минут). В прямоугольной системе координат этому условию удовлетворяют точки, лежащие внутри квадрата $OABC$. Друзья встретятся, если между моментами их прихода пройдет не более 5 минут, то есть $|y-x| \leqslant 5$.

Задача сводится к решению системы неравенств.
$y - x \leqslant 5, \quad x - y \leqslant 5, \quad x \in [0, 60], y \in [0, 60]$.

Этим неравенствам удовлетворяют точки, лежащие внутри закрашенной области G, рис. 2. Тогда вероятность встречи равна отношению площадей области G и квадрата $OABC$, то есть

$$P(A) = \frac{S_G}{S_{OABC}} = \frac{60^2 - 55^2}{60^2} = \frac{5 \cdot 115}{60^2} = \frac{23}{144} = 0{,}16.$$ ▶

Ответ: 0,16.

1.8. Элементы комбинаторики

Для решения более сложных задач познакомимся с некоторыми элементами комбинаторики.

Для непосредственного подсчёта вероятности появления события на основе классического определения применяются, как правило, формулы комбинаторики (раздела математики, изучающего вопросы о том, сколько различных комбинаций (соединений) можно составить из заданного числа объектов).

Большинство задач комбинаторики решается с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения.

Правило суммы. Если элемент a из некоторого конечного множества можно выбрать n_1 способами, а другой элемент b можно выбрать n_2 способами, то выбор «или a или b» можно осуществить $n_1 + n_2$ способами.

При этом способы выбора элементов a и b не должны совпадать между собой. В противном случае будет $m + k - l$ способов выбора, где l – число совпадений.

Правило произведения. Пусть даны два упорядоченных множества A и B: A содержащее n_1 элементов $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\} \in A$ и B, содержащее n_2 элементов $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\} \in B$. Тогда можно образовать ровно $n_1 n_2$ различных пар $\{(a_i, b_j)\big| i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2}\}$, содержащих по одному элементу из каждого множества.

Это правило можно обобщить на случай любого конечного числа упорядоченных множеств.

Пример 1.14. *Имеются 3 партии деталей. В первой 12, во второй – 14, в третьей – 5 деталей. Сколько можно образовать комплектов из трёх деталей, содержащих по одной детали из каждой партии?*

◀Полагая $n_1 = 12$, $n_2 = 14$ и $n_3 = 5$ по правилу произведения комбинаторики получим $n = n_1 n_2 n_3 = 12 \cdot 14 \cdot 5 = 840$ комплектов.▶

Пример 1.15. *Сколько паролей состоящих их двух символов можно получить из имеющихся трёх букв a, b, c, если: а) буквы не повторяются? б) если буквы повторяются?*

а)◀$n_1 = 3, n_2 = 2$. Следовательно, $n = 2 \cdot 3 = 6$.
Перечислим их: $\{ab, ab, ac, ba, bc, cb\}$.▶

б) ◀Так как символы могут повторятся, то $n_1 = 3, n_2 = 3$.
Следовательно, $n = 3 \cdot 3 = 9$: $\{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$.▶

Пример 1.16. *Четырёхзначный пароль состоит из двух частей по два символа в каждой (без повторений символов). При этом первая часть набирается из четырёх букв a,b,c,d, а вторая из трёх цифр 1,2,3. Сколько различных паролей можно набрать?*

◀По правилу умножения первая часть пароля имеет $4 \cdot 3 = 12$ комбинаций: $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$, а вторая — $3 \cdot 2 = 6$ комбинаций: $12, 13, 21, 23, 31, 32$. Ещё раз применяем правило умножения $n = 12 \cdot 6 = 72$.▶

Определение 1.12. ***Факториалом*** *натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n:* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ *(*$n!$ *читается «эн факториал»). Факториал нуля считается равным единице:* $0! = 1$.

Определение 1.13. ***Перестановками*** *называются наборы состоящие из одного и того же количества элементов, отличающихся только порядком следования элементов (например, n карточек с буквами при их расположении слева направо).*

Легко доказать, что количество перестановок число перестановок из n различных элементов равно

$$P_n = n!. \tag{1.20}$$

Пусть имеется n предметов. Первый из этих n предметов можно расположить на любом из n мест, для второго остаётся уже $n-1$ свободное место. Каждый способ расположения первого предмета может сочетаться с одним из способов расположения второго, значит эти два предмета можно расположить $n(n-1)$ способами. Повторяя это рассуждение, получим формулу (1.20).

Пример 1.17. *Найти вероятность того, что при случайном раскладе карточек с буквами* $\boxed{Р}$ $\boxed{И}$ $\boxed{М}$ *получится слово «МИР».*

◀Общее число возможных исходов данного опыта равно $n = 3! = 6$. Число исходов в которых появляется слово «МИР» равно $m = 1$. В соответствии с классическим определением вероятности $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$.▶

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{6}$.

Пример 1.18. *Найти вероятность того, что при случайном раскладе карточек с буквами* $\boxed{А}$ $\boxed{А}$ $\boxed{М}$ $\boxed{М}$ *получится слово «МАМА».*

◀Карточки с одинаковыми буквами пронумеруем: $\boxed{А_1}$ $\boxed{А_2}$ $\boxed{М_1}$ $\boxed{М_2}$. Число возможных исходов данного опыта $n = 4! = 24$. Слово «МАМА» получается, если буква А стоит на 2-м и 4-м местах (таких исходов $2! = 2$), а буква М стоит на 1-м и 3-м местах (таких исходов тоже $2! = 2$).

Перечислим все исходы в которых получается слово «МАМА»:
$\boxed{М_1 | А_1 | М_2 | А_2}$, $\boxed{М_2 | А_1 | М_1 | А_2}$, $\boxed{М_1 | А_2 | М_2 | А_1}$, $\boxed{М_2 | А_2 | М_1 | А_1}$.
Таким образом, число благоприятных исходов $m = 2! \cdot 2! = 4$. Окончательно:

$$P(A) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167.▶$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$.

Определение 1.14. ***Размещениями*** *из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами или порядком их расположения в выборке.*

Можно доказать, что число размещений из n по m, обозначаемое A_n^m, определяется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.21}$$

Доказательство проведем для A_n^3. Первый из n предметов можно разместить на любом из n мест, т.е. n способами, для второго остаётся $(n-1)$ способ размещения и, поскольку каждый способ размещения первого предмета может сочетаться с любым способом размещения второго, первые два предмета можно разместить $n(n-1)$ способами. Для третьего предмета остаётся $(n-2)$ места, поэтому всего 3 предмета можно разместить $n(n-1)(n-2)$ способами: $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$. Несложными преобразованиями доказывается и вторая из формул (1.21):

$$\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-3)\cdot\ldots\cdot 1} = n(n-1)(n-2). \tag{1.22}$$

Размещения обладают следующими свойствами:

$$A_n^n = n! = P_n, \quad A_n^0 = 1, \quad A_n^1 = n. \tag{1.23}$$

Действительно, число способов размещения n различных предметов на n местах (A_n^n) равно числу различных способов их упорядочивания, т.е. равно числу перестановок (P_n). 0 предметов можно разместить на n местах единственным способом («ничего не размещать»), а 1 предмет — n способами (или на 1-м месте, или на 2-м и т.д.). Указанные свойства вытекают также из формулы (1.21).

Если в множестве из n элементов имеются m повторяющихся элементов, то число размещений с повторениями из n элементов по m элементов равно

$$\overline{A}\,_n^m = n^m. \tag{1.24}$$

Пример 1.19. *На карточках написаны буквы шесть различных букв:* $\boxed{А}$ $\boxed{Б}$ $\boxed{Д}$ $\boxed{Е}$ $\boxed{О}$ $\boxed{П}$. *Найти вероятность того, что при случайном выборе четырёх карточек и расположении их слева направо, получится слово: «ОБЕД».*

◀Общее число возможных исходов данного опыта $n = A_6^4 = 6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3 = 360$, т.к. порядок букв в слове наряду с их количеством определяет его смысл. Число благоприятных исходов $m = 1$.

Окончательно $P(A) = \dfrac{1}{360} \approx 0{,}003$.▶

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{360} \approx 0{,}003$.

Пример 1.20. *Ребенок играет с 10-ю буквами магнитной азбуки А, А, А, Б, Б, Б, Б, О, О, О. Найти вероятность того, что вынув наугад и разложив последовательно на доске 6 букв, он получит слово «БАОБАБ».*

◀Число всех случаев n равно числу размещений из 10 элементов по 6: $n = A_{10}^6 = \dfrac{10!}{(10-6)!} = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5$. Число случаев m, благоприятствующих событию А, найдем, учитывая, что слово «БАОБАБ» не изменится, если две его буквы А выбирать из трёх данных букв А различными способами. Число их равно A_3^2. Аналогично и для букв Б и О. Поэтому $m = A_3^2 \cdot A_4^3 \cdot A_3^1$. Следовательно,

$P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{A_3^2 \cdot A_4^3 \cdot A_3^1}{A_{10}^6} = \dfrac{1}{350}$.▶

Если в множестве из n элементов имеются k различных элементов, n_1 одинаковых элементов одного типа, n_2 одинаковых элементов другого типа, n_i – число одинаковых элементов i–го типа, то можно показать, что число перестановок с повторениями из n элементов равно

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}. \qquad (1.25)$$

Пример 1.21. *Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 2, 2, 2, 5, 5, 7.*

◀Используем формулу (1.25). Здесь три двойки, две пятерки и одна семерка. Поэтому $n = 6, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1$. Получаем $P_6(3,2,1) = \dfrac{6!}{3!\cdot2!\cdot1!} = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{2} = 60$.▶

Определение 1.15. ***Сочетаниями*** *из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами.*

Число сочетаний из n по m определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (1.26)$$

Действительно, число размещений из n по m (A_n^m) в $m!$ раз больше числа сочетаний C_n^m, т.к. в сочетаниях не учитываются различные перестановки m

предметов на занимаемых ими местах (порядок расположения предметов для сочетаний несущественен):

$$A_n^m = C_n^m \cdot m! \quad \Longrightarrow \quad C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Сочетания обладают следующими свойствами:

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$,

(2) $C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$,

(3) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_n^i = \left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n\right) = (1+1)^n = 2^n$.

Первое и второе свойства непосредственно вытекают из формулы 1.26 или определения 1.15 (сделайте это самостоятельно).

Для доказательства третьего свойства напомним формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}. \tag{1.27}$$

Полагая $a = b = 1$, получаем свойство 3.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов определяется формулой

$$\overline{C}\,_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \tag{1.28}$$

Пример 1.22. *Найти вероятность того, что при случайном выборе 5 шаров из урны, содержащей 10 шаров, из которых 3 белых и 7 красных, среди выбранных окажется 2 белых и 3 красных.*

◀Запишем условия кратко:

$10ш = 3б + 7кр$,

$5ш = 2б + 3кр$.

Предположим, что шары в урне пронумерованы от 1 до 10, причём шары с 1 по 3 — белые, а с 4 по 10 — красные. Общее число возможных исходов n равно числу способов, которыми из 10 шаров можно выбрать 5:

$$n = C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot (10-5)!} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

Число благоприятствующих исходов m равно числу способов, которыми из 3 белых шаров можно выбрать 2 белых, а из 7 красных шаров можно выбрать 3 красных. Так как каждый способ выбора белых шаров может сочетаться с любым способом выбора красных, получим:

$$m = C_3^2 \cdot C_7^3 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 105.$$

Окончательно: $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_3^2 \cdot C_7^3}{C_{10}^5} = \dfrac{105}{252} \approx 0{,}417$.▶

Ответ: $P(A) \approx 0{,}417$.

Данную задачу можно записать в общем виде. В урне находятся n белых и m чёрных шаров. Из урны случайным образом выбрали $k+l$ шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно k белых и l чёрных шаров.

$$P(A) = \frac{C_n^k \cdot C_m^l}{C_{n+m}^{k+l}}. \tag{1.29}$$

Замечание 1.5. *Вместо урны может быть любой другой объект (колода карт, экзаменационные билеты, книги, карандаши и т.д.), а вместо шаров другие предметы, причём их может быть несколько.*

Эту задачу можно обобщить на k групп. Пусть имеется n_1 предметов первого типа, n_2 предметов второго типа,..., n_k предметов k-го типа. Из этих $N = n_1 + n_2 + \cdots n_k$ предметов выбирают M предметов. Найти вероятность того, что среди выбранных предметов будет m_1 предметов первого типа, m_2 предметов второго типа,..., m_k предметов k-го типа. Очевидно, что $M = m_1 + m_2 + \cdots m_k$. Тогда вероятность искомого события A будет равна

$$P(A) = \frac{C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdots C_{n_k}^{m_k}}{C_N^M}. \tag{1.30}$$

Пример 1.23. *Найти вероятность того, что при случайном выборе 10 шаров из урны, содержащей 20 шаров, из которых 6 белых и 14 чёрных , среди выбранных окажется 4 белых и 6 чёрных.*

◀Решение данной задачи можно записать в виде $P(A) = \dfrac{C_6^4 \cdot C_{14}^6}{C_{20}^{10}}$.

Для получения числового значения применяем формулу (1.26)

$$\frac{C_6^4 \cdot C_{14}^6}{C_{20}^{10}} = \frac{6! \cdot \quad 14! \quad \cdot 10! \cdot 10!}{4! \cdot 2! \; 6! \cdot 8! \quad \cdot 20!}.$$

После сокращения получим

$P(A) = \dfrac{315}{1292}$.▶

В современную эпоху развития компьютерной техники, когда большинство студентов имеют смартфоны, позволяющие применять стандартные пакеты компьютерной математики, необходимо обучать их использовать эти пакеты и доводить решение, даже сложных задач, до числового значения. Заставлять студента покупать коммерческие пакеты преподаватель не имеет право, поэтому в дальнейшем будут приведены примеры программ для свободного пакета *maxima*, работающего в операционных системах Android, Windows и Linux. Студент может, прямо на первом занятии, её скачать и установить за 5 минут. В дальнейшем пакет maxima часто будет использоваться для вычислений и графического представления различных заданий.

Официальный интернет-адрес для скачивания свободного пакета maxima:
https://sourceforge.net/projects/maxima/files/Maxima-Windows
В операционных системах Android приложение называется – *Maxima on Android*.

Maxima-программа, решающая поставленную выше задачу, имеет вид:

(%i1) P:binomial(6, 4)*binomial(14, 6)/binomial(20, 10);

$(P)\dfrac{315}{1292}$

При многократном использовании встроенной функции *binomial*, программу можно укоротить, заменив имя функции на более короткое. Например, присвоить ей более привычное название C(n,m):=binomial(n, m);
И тогда во всех командах можно использовать данную функцию
P:C(6, 4)*C(14, 6)/C(20, 10); Pn:P,numer;

Для вычисления числа размещений можно ввести функцию:
A(n,m):= n!/(n-m)!;

Если результат необходимо получить в виде приближённого десятичного числа, то подаём такую команду:

P:binomial(6, 4)*binomial(14, 6)/binomial(20, 10); Pn:P,numer;

(P) $\dfrac{315}{1292}$ (Pn) 0.2438080495356

Ответ: $P(A) = \dfrac{315}{1292} \approx 0{,}244$.