17. Консультация к экзамену

17.1. Примерный тестовый билет

1. Случайным образом выбраны два неотрицательные действительные числа x и y, таких, что сумма их не превышает 10. Найти вероятность того, что и сумма их квадратов больше 50.

2. При каждом включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что для запуска двигателя придётся включать зажигание более четырёх раз.

3. В трёх цехах завода производится соответственно $40\%, 35\%$ и 25% всей однотипной продукции; причём брак каждого цеха составляет $4\%, 3\%$ и 5% соответственно. Случайно выбранное изделие оказалось бракованным. Найти вероятности того, что оно было сделано в третьем цехе.

4. Устройство состоит из 10 элементов с одинаковой надежностью 0,2. (Надежность элемента – вероятность его работы за время t.) Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за время t выйдет из строя более двух элементов.

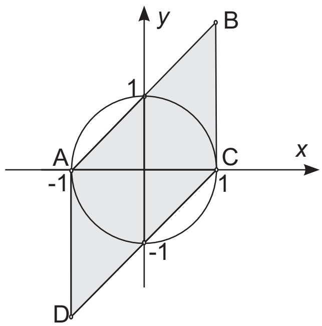
5. Случайная величина — число бракованных деталей в партии. Детали проверяют до первого появления бракованной. Количество деталей неограниченно. Вероятность брака для каждой детали одинакова и равна 0,12. Определить вероятность **P** того, что в партии будет проверено не более четырёх деталей.

6. Каким должен быть допуск отклонения размера детали от номинала, чтобы с вероятностью 0,905 отклонение было допустимым, если средняя квадратическая ошибка отклонения равна 15 мм, а систематическая ошибка равна нулю? (Закон распределения — нормальный).

7. Числовая выборка представлена в виде статистического распределения. Найти несмещённую выборочную дисперсию.

x_i	3,5	4,1	4,7	5,4	5,6	6,2
m_i	2	3	2	4	3	2

8. Случайный вектор (ξ, η) распределен равномерно в области G. Найти корреляционный момент.



Итоговый тест проводится сотрудниками ЦДО по адресу: https://online-edu.mirea.ru/, строго по расписанию экзаменационной сессии. Раньше зайти на тест нельзя, и по окончанию отведённого для группы времени, тест автоматически завершается.

Тест проверяет компьютер. При этом он сравнивает числовые значения выданные студентом, с ответом представленным разработчиками теста и если разность значений по абсолютной величине не превосходит заложенную в ответе погрешность, ответ считается верным.

Разработчики теста заложили во всех задачах ответы в виде десятичного числа, содержащего не более четырёх знаков после запятой. Поэтому, если в полученном числе более четырёх знаков после запятой, его надо округлить до четырех знаков после десятичной запятой и записать в поле ответа.

Для вычисления функции Гаусса, Лапласа, распределения Стьюдента, данные лучше брать из таблицы приложений 1-3 этой работы.

В тестовых задачах, использующих приближённые формулы (Муавра-Лапласа, Пуассона и т.д), учитывается потеря точности ответа.

Рассмотрим методы решения задач представленных в экзаменационном билете.

17.2. Задачи о выборке

В урне находятся n белых и m чёрных шаров. Из урны случайным образом достали $k+l$ шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно k белых и l чёрных шаров.

$$P(A) = \frac{C_n^k \cdot C_m^l}{C_{n+m}^{k+l}}, \tag{17.1}$$

где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \tag{17.2}$$

Пример 17.1. *Из колоды в 36 карт наугад вынимают 8 карт. Найти вероятность того, что взяли три карты бубновой масти и три карты чёрной масти.*

Р е ш е н и е: В колоде карт всего 9 карт бубновой масти и 18 карт чёрной масти. Искомое событие A происходит когда вытаскивают три карты бубновой масти и три карты чёрной и две карты червонной масти. Применяем формулу выборки для трёх предметов (17.1).

$$P(A) = \frac{C_9^3 \cdot C_{18}^3 \cdot C_9^2}{C_{36}^8} = \frac{9! \quad \cdot \quad 18! \cdot \quad 9! \quad \cdot \quad 8! \cdot 28!}{3! \cdot 6! \cdot 3! \cdot 15! \cdot 2! \cdot 7! \cdot 36!} = \frac{4032}{49445} \approx 0{,}082.$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{4032}{49445} \approx 0{,}082.$

Пример 17.2. *В коробке находится 20 маркеров: 10 синих, 8 красных и 2 чёрных. Наугад взяли 5 маркеров. Найти вероятность того, что среди взятых маркеров: два красные и хотя бы один чёрный.*

Решение: Пусть A — событие состоящее в том, что из коробки взяли 5 маркеров: два красные и хотя бы один чёрный. Применяем формулу классического определения вероятностей $P(A) = \dfrac{m}{n}$.
Число всевозможных исходов события A равно
$n = C_{20}^5 = \dfrac{20!}{5! \cdot 15!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 19 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3 = 15504.$

Число исходов благоприятствующих событию A равно
$m = C_8^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_2^1 + C_8^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_2^2 = 2520 + 280 = 2800.$
Следовательно, $P(A) = \dfrac{2800}{15504} = \dfrac{175}{969} \approx 0{,}181.$

17.3. Задачи на геометрическое определение вероятности

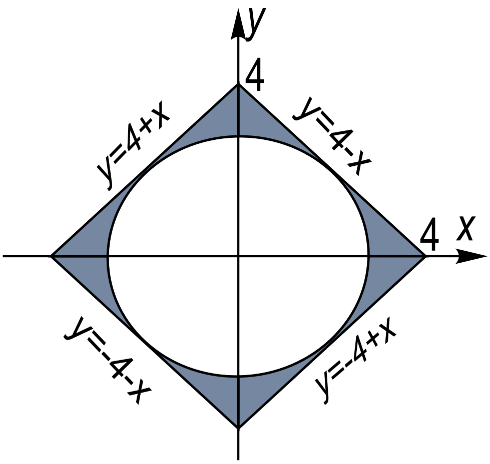


Рис. 55. *К примеру 17.3*

Пример 17.3. *На комплексную плоскость в область* $|Imz| + |Rez| \leqslant 4$ *наудачу брошена точка. Найдите вероятность, что она попадёт внутрь области области* $|z| \geqslant 2\sqrt{2}$.

Р е ш е н и е:

Перейдём к действительным переменным. $z = x + i \cdot y$, $Rez = x$, $Imz = y$. Область Ω на которую брошена точка в действительных переменных имеет вид: $|x| + |y| \leqslant 4$.

Раскрываем модули

$$x = \begin{cases} \ \ x, \text{при } x \geqslant 0 \ \text{ в I и IV четверти,} \\ -x, \ x < 0 \ \text{ в II и III четверти.} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \ \ y, \ \text{при } y \geqslant 0 \ \text{ в I и II четверти,} \\ -y, \ \ \text{при } y < 0 \ \text{ в III и IV четверти.} \end{cases}$$

Получаем систему четырёх неравенств, соответствующих каждой четверти:

$$\begin{cases} y \leqslant 4 - x, \\ y \leqslant 4 + x, \\ y \geqslant -4 - x, \\ y \geqslant -4 + x. \end{cases}$$

На рис. 55, изображены границы области Ω. Сама область является квадратом со сторонами равными $\sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$. Площадь её равны $S_\Omega = 32$.

Область в которую должна попасть точка, представляет внешность круга радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в начале координат. На рис. 55, данная область закрашена.

$P(A) = \dfrac{32 - \pi(2\sqrt{2})^2}{32} = 1 - \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}2146.$

Ответ: $P(A) = 1 - \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}2146.$

Пример 17.4. *На комплексную плоскость в область* $|z - i - 1| \leqslant 1$ *наудачу брошена точка. Найдите вероятность, что она попадёт внутрь области* $Imz - (Rez)^2 \geqslant 1$.

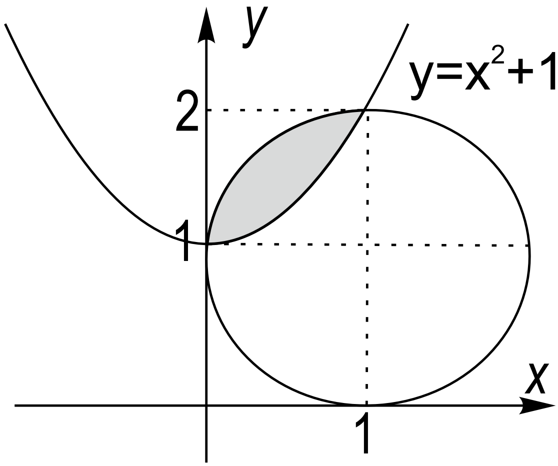


Рис. 56. *К примеру 17.4*

Р е ш е н и е: Перейдём к действительным переменным.
$z = x + i \cdot y$, $Rez = x$, $Imz = y$. Область Ω на которую брошена точка в действительных переменных представляет собой окружность радиуса 1 с центром в точке $M(1,1)$.
$|(x-1) + i(y-1)| \leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \leqslant 1 \Rightarrow$
$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$.

Площадь области Ω равна $S_\Omega = \pi$.

Область G, в которую должна попасть точка, в действительных переменных задана уравнением: $y \geqslant 1 + x^2$. Это внутренняя часть параболы $y = 1 + x^2$. На рис. 55, данная область закрашена. Найдём её площадь. Для этого от площади четверти круга вычтем площадь криволинейной трапеции которую вырезает парабола от четверти круга.

$S_G = \dfrac{\pi}{4} - \int\limits_0^1 x^2 dx = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{3}$.

$P(A) = \dfrac{S_G}{S_\Omega} = \dfrac{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{3}}{\pi} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3\pi} \approx 0{,}1439$.

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3\pi} \approx 0{,}1439$.

17.4. Теорема произведения вероятностей

Теорема 17.16 (Теорема произведения вероятностей). *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A). \tag{17.3}$$

Следствие 17.1. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятностей одного из них на условные вероятности всех остальных:*

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Определение 17.1. *Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятность события B:*

$$P(B/A) = P(B). \tag{17.4}$$

Теорема 17.17. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей.*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{17.5}$$

Пример 17.5. *В урне* 13 *белых и* 8 *чёрных шаров. Из урны вынимают три шара. Найти вероятность того, что:*

(1) *все время попадались белые шары;*

(2) *все вынутые шары были одного цвета.*

Р е ш е н и е:

(1) Пусть A_i — события состоящие в том, что i-тый шар белый ($i = 1, 2, 3$). Тогда искомое событие $A = A_1 A_2 A_3$. Данные события зависимые. Поэтому

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 A_2) = \frac{13}{21} \cdot \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \\ = \frac{143}{665} \approx 0{,}215.$$

Данную задачу можно решить используя классическое определение вероятности $P(A) = \dfrac{m}{n}$ и формулы комбинаторики.

Здесь $n = C_{21}^3$, $m = C_{13}^3$.

$$P(A) = \frac{C_{13}^3}{C_{21}^3} = \frac{13! \quad 3!18!}{3!10! \quad 21!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{21 \cdot 20 \cdot 19} \approx 0{,}215.$$

Ответ: $\approx 0{,}215$.

(2) Искомое событие

$A = \{$все три белого цвета$\} + \{$все три черного цвета$\}$.

Получаем

$$P(A) = \frac{13}{21} \cdot \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} + \frac{8}{21} \cdot \frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} = \frac{143}{665} + \frac{4}{95} = \frac{9}{35} \approx 0{,}215 + 0{,}042 = 0{,}257.$$

Ответ: $\approx 0{,}257$.

Пример 17.6. *В урне 13 белых и 8 чёрных шаров. Из урны по очереди вынимают три шара, каждый раз возвращая вынутый шар в урну. Найти вероятность того, что:*

(1) *все время попадались белые шары;*

(2) *все вынутые шары были одного цвета.*

Р е ш е н и е:

(1) Вероятность искомого события равна $\left(\dfrac{13}{21}\right)^3 = \dfrac{2197}{9261} \approx 0{,}237.$

Ответ: $\dfrac{2197}{9261} \approx 0{,}237.$

(2) Искомое событие $A = \{$все три одного цвета$\}$ есть сумма двух несовместных событий:

$$A_1 = \{\text{три белых}\} \quad \text{и} \quad A_2 = \{\text{три чёрных}\}.$$

Согласно п. 1 и замечанию к нему,

$P(A_1) = \dfrac{2197}{9261}$, $P(A_2) = \left(\dfrac{8}{21}\right)^3 = \dfrac{512}{9261}$, откуда

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{2197}{9261} + \frac{512}{9261} = \frac{2709}{9261} = \frac{43}{147} \approx 0{,}293.$$

Ответ: $\dfrac{43}{147} \approx 0{,}293.$

17.5. Формула полной вероятности

Теорема 17.18 (Формула полной вероятности)**.** *Вероятность события A, которое может наступить только вместе с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2 \dots H_n$, называемых гипотезами, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \dots \\ \dots + P(H_n)P(A/H_n). \tag{17.6}$$

Кратко эту формулу можно записать в виде

$$P(A) = \sum_{i=k}^{n} P(H_k)P(A/H_k).$$

Теорема 17.19 (Формула Байеса)**.** *В условиях формулы полной вероятности для $i = 1, \dots, n$:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)}. \tag{17.7}$$

или

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}. \tag{17.8}$$

ПРИМЕР 17.7. *В трёх цехах завода производится соответственно* $40\%, 35\%$ *и* 25% *всей однотипной продукции; причём брак каждого цеха составляет* $4\%, 3\%$ *и* 5% *соответственно. а) Какова вероятность того, что изделие, выбранное случайно, будет бракованным? б) Пусть теперь случайно выбранное изделие оказалось бракованным. Найти вероятности того, что оно было сделано в первом, втором, третьем цехах.*

Р е ш е н и е: а) Событие A – выбранное изделие браковано. Гипотезы H_1, H_2, H_3 состоят в том, что изделие произведено соответственно в первом, втором, третьем цехах. Тогда

$$P(H_1) = 0{,}4, \quad P(H_2) = 0{,}35, \quad P(H_3) = 0{,}25,$$

а условные вероятности

$$P(A/H_1) = 0{,}04, \quad P(A/H_2) = 0{,}03, \quad P(A/H_3) = 0{,}05.$$

Полная вероятность

$$P(A) = \sum_{i=3}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = 0{,}4 \cdot 0{,}04 + 0{,}35 \cdot 0{,}03 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}039.$$

Вероятности того, что бракованное изделие сделано в первом, втором, третьем цехах, найдем по формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}04}{0{,}039} = \frac{16}{39} \approx 0{,}410,$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{7}{26} \approx 0{,}269,$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{25}{78} \approx 0{,}321.$$

Ответ: $P(A) = 0{,}039$; $P(H_1/A) = 16/39 \approx 0{,}410$; $P(H_2/A) = 7/26 \approx 0{,}269$; $P(H_3/A) = 25/78 \approx 0{,}321$.

17.6. Повторные независимые испытания

Предположим, что производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может наступить или не наступить некоторое событие A. Обозначим $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ и определим $P_n(m)$ — вероятность того, что событие A произойдет m раз в n испытаниях.

Для вычисления $P_n(m)$ используется формула Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{17.9}$$

Пример 17.8. *Прибор состоит из* 10 *узлов. Вероятность безотказной работы в течение определённого времени для каждого узла равна* 0,98*. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за данное время откажут ровно два узла.*

Р е ш е н и е: Здесь $n = 10$, $q = 0{,}98$, $p = 1 - q = 0{,}02$, $m = 2$. По формуле Бернулли (17.9)

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot q^8 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^8 \approx 0{,}015.$$

Ответ: $P_{10}(2) \approx 0{,}015$.

17.7. Наивероятнейшее число появления события А

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Часто необходимо знать значение m, при котором вероятность $P_n(m)$ максимальна; это значение m называется наивероятнейшим числом m^* наступления события A в n независимых повторных испытаниях.

Можно показать, что

$$np - q \leqslant m^* \leqslant np + p. \tag{17.10}$$

Если неравенству (17.10) удовлетворяют два целых значения m^*, имеется два наивероятнейших числа.

Пример 17.9. *Заявки на получение инструмента поступают на склад от восьми цехов ежедневно и независимо. Вероятность получения заявки от каждого склада равна* 0,6. *Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.*

Р е ш е н и е: Здесь $n = 8,\ p = 0{,}6,\ q = 0{,}4$. Тогда

$$np - q \leqslant m^* \leqslant np + p \quad \text{или} \quad 4,4 \leqslant m^* \leqslant 5,4.$$

Следовательно, наиболее вероятное число заявок $m^* = 5$. Вероятность пяти заявок из восьми равна

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot 0{,}07776 \cdot 0{,}064 \approx 0{,}279.$$

Ответ: $m^* = 5,\ P_8(5) \approx 0{,}279$.

17.8. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

Рассмотрим задачи о повторных независимых испытаниях с применением локальной и интегральной теорем Муавра-Лапласа.

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Локальная теорема Муавра-Лапласа даёт асимптотическую формулу, позволяющую приближённо найти вероятность появления события ровно m раз в n испытаниях, если n достаточно велико.

Теорема 17.20 (Локальная теорема Муавра-Лапласа)**.** *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появиться m раз в n испытаниях, приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \not\approx 0$, $p \not\approx 1$):*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, f\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \text{где } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2}}. \tag{17.11}$$

Для вычисления суммарной («интегральной») вероятности того, что число появлений события A находится в заданных пределах при больших n также используется асимптотическая формула, позволяющая вычислять эту вероятность приближённо.

Для пользования этой формулой познакомимся с функцией Лапласа.

Определение 17.2. *Функцией Лапласа $\Phi(x)$ называется:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{17.12}$$

Теорема 17.21 (Интегральная теорема Муавра-Лапласа)**.** *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ того, что событие A появится не менее m_1, но не более m_2 раз в n испытаниях приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \not\approx 0$, $p \not\approx 1$):*

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{17.13}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ *— функция Лапласа.*

Пример 17.10. *Вероятность того, что изделия некоторого производства будут отнесены к первому сорту, равна* 0,56. *Чему равна вероятность того, что из* 120 *случайно взятых изделий производства* 67 *окажется первого сорта?*

Решение: В данной задаче

$$n = 120,\ p = 0{,}56,\ \ q = 0{,}44,\ \ m = 67,\ \ npq = 29,568.$$

Применим локальную теорему Муавра-Лапласа. Так как

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{67 - 120 \cdot 0{,}56}{\sqrt{29{,}568}} \approx -0{,}04, \quad f(-0{,}04) = f(0{,}04) = 0{,}3986,$$

то:

$$P_{120}(67) = \frac{f(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}3986}{\sqrt{29{,}568}} \approx 0{,}073.$$

Пример 17.11. *В цехе находится* 150 *станков. Вероятность того, что один станок в течение смены потребует к себе внимания, равна* 0,2. *Найти вероятности того, что: а) за смену* 40 *станков потребуют к себе внимания, б) от* 25 *до* 35 *станков потребуют к себе внимания.*

а) В первом случае можно применить локальную теорему Муавра-Лапласа, так как $n = 150$, т.е. $n > 100$, а при $p = 0{,}2,\ q = 0{,}8$ величина $npq = 24 > 20$. Здесь $m = 40$,

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 150 \cdot 0{,}2}{\sqrt{24}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \approx 2,04.$$

По таблице найдем $f(2{,}04) = 0{,}05$ и, согласно (17.11), получим:

$$P_{150}(40) \approx 0{,}05/\sqrt{24} \approx 0{,}010.$$

б) Во втором случае используем интегральную теорему (17.21). Здесь
$m_1 = 25,\ m_2 = 35,$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{25 - 30}{\sqrt{24}} \approx -1{,}02, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{35 - 30}{\sqrt{24}} \approx 1{,}02.$$

С помощью (17.13) найдем

$$P_{150}(25 \leqslant m \leqslant 35) \approx \Phi(1{,}02) - \Phi(-1,02) = 2\Phi(1{,}02) \approx 2 \cdot 0{,}3461 = 0{,}692.$$

17.9. Формула Пуассона

Если вероятность p появления события A в испытании Бернулли близка к 0 или 1 , то теоремы 17.20 и 17.21 неприменимы, так как дают большую погрешность. В этом случае следует пользоваться приближённой формулой Пуассона для вычисления $P_n(m)$ при больших n.

Теорема 17.22. *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и близка к нулю, а n велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз в n испытаниях приближённо равна (при $n \to \infty,\ p \to 0, \lambda = np \to a$):*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \tag{17.14}$$

Замечание 17.1. *Случай, когда $p \approx 1$, сводится к рассмотренному, если вместо $P_n(m)$ вычислять равную ей вероятность $P_n(n-m)$ появления $n-m$ раз противоположного события $\bar{A}$, вероятность появления которого в одном испытании $q = 1 - p \approx 0$.*

Пример 17.12. *При перевозке автомобилей по железной дороге вероятность того, что один автомобиль в пути получит повреждение, равна* 0,003. *Отправлено 200 автомобилей. 1) Найти вероятности того, что в пути будет повреждено три автомобиля; 2) более трёх автомобилей.*

Р е ш е н и е: 1) Поскольку $n = 200$, $p = 0{,}003$, $\lambda = np = 0{,}6$, то при $m = 3$

$$P_{200}(3) = \frac{0{,}6^3 \cdot e^{-0{,}6}}{3!} \approx 0{,}019.$$

2). $P_{200}(m > 3) = 1 - (P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) + P_{200}(3)) =$
$= 1 - e^{-0{,}6}\left(\frac{0{,}6^0}{0!} + \frac{0{,}6^1}{1!} + \frac{0{,}6^2}{2!} + \frac{0{,}6^3}{3!}\right) =$
$= 1 - e^{-0{,}6}(1 + 0{,}6 + 0{,}18 + 0{,}036) = 1 - 1{,}816e^{-0{,}6} \approx 0{,}003.$

Ответ: $P_{200}(3) \approx 0{,}019$, $P_{200}(m > 3) \approx 0{,}003$.

17.10. Отклонение частоты от вероятности

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Пусть проводятся испытания Бернулли с постоянной вероятностью p появления события A в каждом из них; событие A появилось m раз в n испытаниях. Найдем вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа ε.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{17.15}$$

Пример 17.13. *Вероятность появления события в каждом из* 800 *независимых испытаний равна* 0,6. *Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на* 0,03.

Р е ш е н и е: Здесь $n = 800$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $\varepsilon = 0{,}03$. Нужно найти вероятность

$$P\left(\left|\frac{m}{800}-0{,}6\right|\leqslant 0{,}03\right).$$

По формуле (17.16) эта вероятность равна

$$2\cdot\Phi\left(0{,}03\cdot\sqrt{\frac{800}{0{,}6\cdot 0{,}4}}\right)\approx 2\cdot\Phi(1{,}73).$$

По таблицам найдем $\Phi(1{,}73)\approx 0{,}4582$. Следовательно, искомая вероятность равна $2\cdot 0{,}4582 = 0{,}9164$.

Ответ: $\approx 0{,}916$.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{17.16}$$

Пример 17.14. *Вероятность появления события в каждом из n независимых испытаний равна* 0,6. *Найти при каком значении n вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на* 0,03 *будет равна 0,9164.*

Решение: Дано

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}6\right| \leqslant 0{,}03\right) = 0{,}9164.$$

По формуле (17.16) эта вероятность равна

$$2 \cdot \Phi\left(0{,}03 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) = 0{,}9164 \ \Rightarrow\ \Phi\left(0{,}03 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) = 0{,}4582 \ \Rightarrow$$
$$0{,}03 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}6 \cdot 0{,}4}} = 1{,}73 \ \Rightarrow n = \left(\frac{1{,}73}{0{,}03}\right)^2 \cdot 0{,}24 \approx 798{,}1$$

Округляя до целого числа в большую сторону, получаем $n = 799$.
Ответ: $n = 799$.

17.11. Случайные величины

Пример 17.15. *На переэкзаменовку по теории вероятностей явились 3 студента. Вероятность того, что первый сдаст экзамен, равна* 0,8, *второй* – 0,7, *третий* – 0,9. *Найдите ряд распределения случайной величины* ξ *числа студентов, сдавших экзамен, постройте график функции распределения, найдите* $M(\xi)$, $D(\xi)$.

Дискретная случайная величина ξ – число числа студентов, сдавших экзамен принимает следующие возможные значения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Введем обозначения: A_i, $i = 1, 2, 3$ — событие состоящее в том, что i-тый студент сдал экзамен. $p_i = P(A_i)$, $q_i = P(\overline{A}_i) = 1 - p_i$.

Тогда событие B_i, состоящее в том i студентов сдадут экзамен можно записать следующими выражениями:

$B_0 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,
$B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,
$B_2 = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$,
$B_3 = A_1A_2A_3$.

Находим вероятности данных событий.

$P(B_0) = q_1q_2q_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}006$
$P(B_1) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 =$
$= 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}092$,
$P(B_2) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 =$
$= 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}398$,
$P(B_3) = p_1p_2p_3 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504$.

Закон распределения примет вид:

ξ	0	1	2	3
p	0,006	0,092	0,398	0,504

Здесь сумма вероятностей равна единице.

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i = 0 \cdot 0{,}006 + 1 \cdot 0{,}092 + 2 \cdot 0{,}398 + 3 \cdot 0{,}504 = 2{,}4.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2{,}4^2 =$$
$$= 1 \cdot 0{,}092 + 4 \cdot 0{,}398 + 9 \cdot 0{,}504 - 5{,}76 = 6{,}22 - 5{,}76 = 0{,}46.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0; \\ 0{,}006 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1; \\ 0{,}098 & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2; \\ 0{,}498 & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

На рис. 57 изображён график функции распределения.

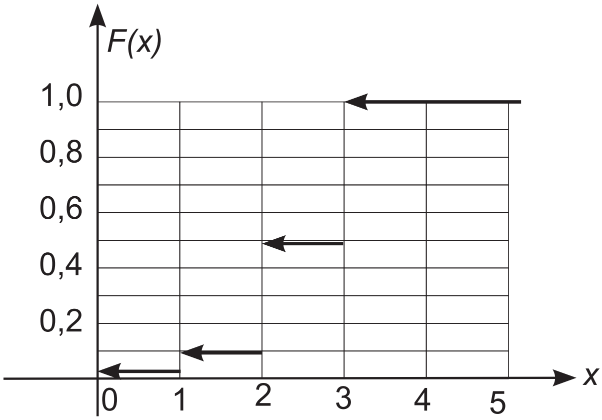


Рис. 57. *Функция распределения примера 17.15*

Пример 17.16. *Случайная величина ξ задана функцией распределения*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant -2, \\ A(x+2)^2 \text{ при } -2 < x \leqslant -1, \\ 1 \text{ при } x > -1. \end{cases}$$

Найти значение параметра A и вероятность того, что в результате испытания величина ξ примет значение, заключенное в интервале $(-3/2, 0)$.

Р е ш е н и е: Используем основное свойство функции распределения для непрерывной случайной величины: $F(x)$ определена и непрерывны на всей действительной оси. Следовательно, при $x = -1$ предел слева должен быть равен 1. Получаем,

$$A(-1+2)^2 = 1 \;\Rightarrow\; A = 1.$$

Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant -2, \\ (x+2)^2 \text{ при } -2 < x \leqslant -1, \\ 1 \text{ при } x > -1. \end{cases}$$

Вероятность того, что ξ примет значение, заключенное в интервале $(-3/2, 0)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(-3/2 < \xi < 0) = F(0) - F(-3/2) = 1 - (-3/2+2)^2 = \frac{3}{4}.$$

Ответ: 0,75.

Пример 17.17. *Непрерывная случайная величина* ξ *задана плотностью распределения* $f(x) = \cos x$ *в интервале* $(0; \pi/2)$*; вне этого интервала* $f(x) = 0$. *Найти вероятность того, что* ξ *примет значение, принадлежащее интервалу* $(\pi/4; \pi/3)$.

Р е ш е н и е: Применим формулу

$$P(a < \xi < b) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

По условию, $a = \pi/4$, $b = \pi/3$, $f(x) = \cos x$. Следовательно, данная вероятность

$$P\left(\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{3}\right) = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \cos x dx = \sin x\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \approx 0{,}159.$$

Ответ: $\approx 0{,}159$.

Пример 17.18. *ξ – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, заданной следующим образом:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ A(4x - x^2), \text{ если } 0 < x \leqslant 4, \\ 0, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) значение параметра A б) вероятность попадания ξ в интервал $(1;2)$; в) функцию распределения $F(x)$.

Решение: а)

$$\int\limits_0^4 A(4x - x^2)dx = A\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = A\left(32 - \frac{64}{3} - 0\right) = \frac{32A}{3}.$$

$$\frac{32A}{3} = 1 \qquad \Rightarrow A = \frac{3}{32}.$$

б) Вероятность

$$P(1 < \xi < 2) = \int\limits_1^2 f(x)dx = \int\limits_1^2 \frac{3}{32}(4x - x^2)dx = A\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{11}{32} \approx 0{,}344.$$

в) Функция распределения $F(x)$ для непрерывной случайной величины даётся формулой

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Если $-\infty < x \leqslant 0$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^x 0dt = 0;$$

если $0 < x \leqslant 4$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \frac{6x^2 - x^3}{32};$$

если, наконец, $x > 4$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{4} \frac{3}{32}(4t - t^2)dt + \int_{0}^{x} 0dt = 1.$$

Ответ: $P(1 < \xi < 2) = 11/32 \approx 0{,}344$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \dfrac{6x^2 - x^3}{32}, \text{ если } 0 < x \leqslant 4, \\ 1, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Пример 17.19. *Случайная величина ξ задана функцией распределения*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ \textit{при} } x \leqslant 0, \\ A(x^2 - 4x) \text{ \textit{при} } 0 < x \leqslant 2, \\ 1 \text{ \textit{при} } x > 2. \end{cases}$$

Найти среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ.

Р е ш е н и е:

Используем основное свойство функции распределения для непрерывной случайной величины: $F(x)$ определена и непрерывны на всей действительной оси. Следовательно, при $x = 2$ предел слева должен быть равен 1. Получаем,

$$A(2^2 - 4 \cdot 2) = 1 \;\Rightarrow\; A = -1/4.$$

Получили

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ x - \dfrac{x^2}{4} \text{ при } 0 < x \leqslant 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Найдём функцию плотности

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{x}{2}, \text{ при } 0 < x \leqslant 2, \\ 0 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Находим математическое ожидание случайной величины ξ

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x) = \int\limits_{0}^{2} \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - m^2(\xi) = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right) dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{3^2}{3} - \frac{x^4}{8}\right)\Bigg|_0^2 - \frac{4}{9} = \frac{8}{3} - 2 - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

17.12. Биномиальный закон распределения

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Пусть проведено n независимых испытаний с вероятностью p появления события A в каждом испытании (испытания Бернулли). Обозначим ξ – случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях. По формуле Бернулли

$$P(\xi = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p, \ m = 0{,}1, \ \ldots, n. \tag{17.17}$$

Определение 17.3. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое нижеприведенной таблицей, называется* ***биномиальным.***

ξ	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$	n
p	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\ldots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\ldots$	p^n

Биномиальное распределение определяется двумя параметрами n и p.

Математическое ожидание и дисперсия для биномиально распределённой случайной величины ξ вычисляется по формулам:

$$M(\xi) = np; \quad D(\xi) = npq. \tag{17.18}$$

Пример 17.20. *Вероятность попадания стрелком в мишень равна* 0,8. *Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины ξ — числа попаданий в мишень при трёх выстрелах. Найти $M(\xi)$ и $D(\xi)$.*

► Данная случайная величина имеет следующие возможные значения: 0 (стрелок не попал в мишень ни разу), 1 (попал один раз), 2 (попал два раза), 3 (ни разу не промахнулся). Здесь $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$, $n = 3$.

По формуле Бернулли (17.17) найдем:

$$P(0) = C_3^0 \cdot (0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^3 = \frac{1}{125}, \quad P(1) = C_3^1 \cdot (0{,}8)^1 \cdot (0{,}2)^2 = \frac{12}{125},$$

$$P(2) = C_3^2 \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^1 = \frac{48}{125}, \quad P(3) = C_3^3 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^0 = \frac{64}{125}.$$

Отметим, что $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1$.

Ряд распределения примет вид:

ξ	0	1	2	3
p	0,008	0,096	0,384	0,512

Найдём $M(\xi)$ и $D(\xi)$ двумя способами.

1 способ. По общим формулам для дискретной случайной величины.

$M(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{3} x_k p_k = 0 \cdot 0{,}008 + 1 \cdot 0{,}096 + 2 \cdot 0{,}384 + 3 \cdot 0{,}512 = 2{,}4$.

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) =$
$= 0^2 \cdot 0{,}008 + 1^2 \cdot 0{,}096 + 2^2 \cdot 0{,}384 + 3^2 \cdot 0{,}512 - 2{,}4^2 = 0{,}48$.

2 способ. По формулам (17.18) для биномиального распределения.

$M(\xi) = np = 3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4 \qquad D(\xi) = npq = 2{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}48$. ◄

17.13. Распределение Пуассона

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Пусть в испытаниях Бернулли $n \to \infty$, $p \to 0$, так, что $np \to \lambda$. Тогда вероятность $P_n(m)$ приближённо определяется с помощью формулы Пуассона:

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0. \tag{17.19}$$

Определение 17.4. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое формулой (17.19), называется распределением Пуассона или* ***пуассоновским распределением****.*

Запишем закон распределения Пуассона в виде таблицы:

ξ	0	1	2	$\ldots$	m	$\ldots$
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	$\ldots$

Итак, для случайной величины, имеющей распределение Пуассона, получим:

$$M(\xi) = D(\xi) = \lambda. \tag{17.20}$$

Пример 17.21. *Вероятность того, что изделие окажется бракованным, равна* 0,02. *Производится выборка* 120 *изделий. Записать закон распределения числа бракованных изделий в выборке. Найти* $M(\xi)$ *и* $D(\xi)$.

► Здесь $n = 120$ и $p = 0{,}02$. Поскольку первая величина больше 100, а вторая – меньше 0,1, то для решения задачи можно применить формулу Пуассона (17.19). Параметр $\lambda = np = 120 \cdot 0{,}02 = 2{,}4$; из таблицы найдем, что $e^{-2{,}4} = 0{,}0907$. Тогда

$$P(\xi = 0) = \frac{2{,}4^0 \cdot e^{-2{,}4}}{0!} = 0{,}0907, \quad P(\xi = 1) = \frac{2{,}4^1 \cdot e^{-2{,}4}}{1!} = 0{,}2177,$$

$$P(\xi = 2) = 0{,}2612, \quad P(\xi = 3) = 0{,}2090, \ldots$$

Здесь наибольшая вероятность при $k = 2$. Распределение Пуассона можно записать следующим образом:

ξ	0	1	2	3	...	k	...
p	0,0907	0,2177	0,2612	0,2090	...	$2{,}4^k \cdot e^{-2{,}4}/k!$	...

$M(\xi) = \lambda = 2{,}4 \qquad D(\xi) = \lambda = 2{,}4.$

17.14. Геометрическое распределение

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Пусть производится ряд независимых испытаний («попыток») для достижения некоторого результата (события A), и при каждой попытке событие A может появиться с вероятностью p. Тогда число попыток ξ до появления события A, включая удавшуюся, является дискретной случайной величиной, возможные значения которой принимают значения: $m = 1, 2, \ldots, m, \ldots$ Вероятности их по теореме умножения вероятностей для независимых событий равны

$$P(\xi = m) = pq^{m-1}, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{17.21}$$

где $0 < p < 1, \quad q = 1 - p$.

Ряд распределения ξ имеет вид

ξ	1	2	3	$\ldots$	m	$\ldots$
P	p	pq	pq^2	$\ldots$	pq^{m-1}	$\ldots$

$$M(\xi) = \frac{1}{p}, \qquad D(\xi) = \frac{q}{p^2}. \tag{17.22}$$

Пример 17.22. *Кубик бросают до первого появления шестерки или пятерки (число бросков неограниченно). Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа произведённых бросков. Найти математическое ожидание и дисперсию ξ. Найти вероятность того, что будет произведено от двух до пяти (включительно) бросков.*

► Используем формулу для геометрического распределения (17.21) $P(\xi = m) = pq^{m-1}, \qquad m = 1, 2, \ldots$, при $p = 1/3, \quad q = 2/3$.

$$P(\xi = k) = 1/3 \cdot (2/3)^{k-1} = 2^{k-1}/3^k, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

$P(\xi = 1) = 1/3; \quad P(\xi = 2) = 1/3 \cdot 2/3 = 2/9;$
$P(\xi = 3) = 1/3 \cdot (2/3)^2 = 4/27; \quad P(\xi = 4) = 1/3 \cdot (2/3)^3 = 8/81;$
$P(\xi = 5) = 1/3 \cdot (2/3)^4 = 16/243; \ldots$

ξ	1	2	3	4	5	...	k	...
p	1/3	2/9	4/27	8/81	16/243	...	$2^{k-1}/3^k$	...

$M(\xi) = \dfrac{1}{p} = 3.$

$D(\xi) = \dfrac{q}{p^2} = 6.$

$P = 2/3^2 + 4/3^3 + 8/3^4 + 16/3^5 = \dfrac{54 + 36 + 24 + 16}{343} = \dfrac{130}{243} \approx 0{,}535.$

◄

17.15. Равномерное распределение

Из непрерывных законов на этом занятии изучим равномерное и экспоненциальное распределения.

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Распределение непрерывной случайной величины называется ***равномерным*** на $[a;b]$, если плотность распределения постоянна и отлична от 0 на этом отрезке и равна нулю вне его:

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{при} \quad x \in [a;b], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Плотность равномерно распределённой на $[a;b]$ случайной величины определяется по формуле:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x \in [a;b], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [a;b]. \end{cases} \tag{17.23}$$

Функция распределения равномерно распределённой на $[a;b]$ случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{при} \quad b < x. \end{cases} \tag{17.24}$$

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}; \quad D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{17.25}$$

Пример 17.23. *Случайная величина* ξ *распределена равномерно с* $M(\xi) = 9/2$ *и* $D(\xi) = 25/12$. *Найти функцию распределения случайной величины* ξ.

►Функция распределения в формуле (17.24) зависит от параметров a и b. Используя (17.25), для определения a и b составим следующие уравнения:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{9}{2}, \qquad \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{25}{12}.$$

Отсюда, с учётом того, что $b > a$, получим $a = 2,\ b = 7$. Функция распределения окончательно примет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 2, \\ \dfrac{x-2}{5} \text{ при } x \in (2, 7], \\ 1 \text{ при } x > 7. \end{cases}$$

◄

17.16. Показательное распределение

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Определение 17.5. *Распределение непрерывной случайной величины называется экспоненциальным (показательным), если плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \textit{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \textit{при} \quad x < 0, \quad \textit{где } \lambda > 0. \end{cases} \tag{17.26}$$

Экспоненциальное распределение определяется одним параметром $\lambda > 0$.

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{17.27}$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{17.28}$$

Пример 17.24. *Для какого значения a функция $f(x) = ae^{-\lambda x}$ при $x \geqslant 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$ является плотностью показательного закона?*

Решение: Так как $f(x) = 0$ при $x < 0$, то

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} ae^{-\lambda x}dx = 1.$$

Отсюда

$$-\frac{a}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = 1 \Rightarrow a/\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = a.$$

Ответ: $a = \lambda$.

Пример 17.25. *Непрерывная случайная величина распределена по экспоненциальному закону (17.26) с параметром $\lambda = 0{,}07$. Найти математическое ожидание и вероятность того, что в результате испытания ξ попадёт в интервал (2, 10).*

Решение: С учётом (17.28) математическое ожидание $M(\xi) = 1/\lambda = 1/0{,}07 = 100/7$. С другой стороны, используя выражение (17.27) для функции распределения, искомую вероятность найдем как приращение этой функции на интервале (2, 10):

$P(2 < \xi < 10) = F(10) - F(2) = 1 - e^{-0{,}7} - 1 + e^{-0{,}14} \approx \approx 0{,}8694 - 0{,}4966 = 0{,}3728 \approx 0{,}373.$

Эту же вероятность можно вычислить как

$$P(2 < \xi < 10) = \int_2^{10} 0{,}07e^{-0{,}07t}dt = -e^{-0{,}07t}\Big|_2^{10} \approx 0{,}373.$$

Ответ: $P(2 < \xi < 10) \approx 0{,}373$.

17.17. Нормальное распределение

Определение 17.6. *Случайная величина* ξ *имеет нормальное распределение с параметрами* a *и* σ, *если её плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{17.29}$$

Этот факт записывать так: $\xi \sim N(a;\sigma)$.

Нормальное распределение определяется двумя параметрами a и σ.

Функции распределения нормального закона:

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \tag{17.30}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа. Для случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение, параметры a и σ имеют простой вероятностный смысл:

$$M(\xi) = a; \quad D(\xi) = \sigma^2; \quad \sigma(\xi) = \sigma. \tag{17.31}$$

Формула для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в заданный интервал:

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \tag{17.32}$$

Вероятность отклонения случайной величины от математического ожидания

$$P\{|\xi - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{17.33}$$

Пример 17.26. *Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 3$, $\sigma = 2$.*
Найти: а) $P(2 < \xi < 3)$, б) $P(|\xi - 3| < 0{,}1)$, в) $P(|\xi - 2| < 2)$.

Р е ш е н и е: а) По формуле (17.32) имеем:
$P(2 < \xi < 3) = \Phi\left(\dfrac{3-3}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{2-3}{2}\right) = \Phi(0) - \Phi(-0{,}5) =$
$= \Phi(0) + \Phi(0{,}5) \approx 0 + 0{,}192 = 0{,}192.$

б) Так как $a = 3$, то для нахождения вероятности неравенства $|\xi - 3| < 0{,}1$, применим формулу (17.33), где $\varepsilon = 0{,}1$. В этом случае

$$P(|\xi - 3| < 0{,}1) = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{2}\right) = 2\Phi(0{,}05) \approx 2 \cdot 0{,}0239 = 0{,}048.$$

в)В этом случае формулу (17.33) применять нельзя. Применяем общую формулу (17.32).

$P(|\xi - 2| < 2) = P(0 < \xi < 4) = \Phi\left(\dfrac{4-3}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{0-3}{2}\right) =$
$= \Phi(0{,}5) - \Phi(-1{,}5) =\approx 0{,}1915 + 0{,}4332 = 0{,}6247.$

Ответ: $P(2 < \xi < 3) \approx 0{,}192$; $P(|\xi - 3| < 0{,}1) \approx 0{,}048$; $P(|\xi - 2| < 2) \approx 0{,}625$.

Пример 17.27. *Диаметр подшипников, выпускаемых заводом, представляет собой случайную величину ξ, распределённую по нормальному закону с $a = 15$ мм и $\sigma = 0{,}4$ мм. Найти вероятность брака P при условии, что разрешается допуск для диаметра подшипника $\pm 0{,}8$ мм. Какую точность диаметра подшипника можно гарантировать с вероятностью* 0,92?

Р е ш е н и е: Так как здесь отклонение $\varepsilon = 0{,}8$, то, согласно (17.33),

$$P(|\xi - 15| < 0{,}8) = 2 \cdot \Phi\Big(\frac{0{,}8}{0{,}4}\Big) = 2 \cdot \Phi(2) \approx 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}954.$$

Отсюда вероятность брака найдется как вероятность противоположного события: $P = 1 - 0{,}954 = 0{,}046$.

Во второй части задачи, наоборот, задана вероятность $P(|\xi - a| < \varepsilon)$ и нужно найти отклонение ε.

Подставим известные данные в формулу (17.33). Тогда

$$0{,}92 = 2 \cdot \Phi(\varepsilon/0{,}4), \ \Phi(\varepsilon/0{,}4) = 0{,}46.$$

Из таблицы найдем, что $\varepsilon/0{,}4 = 1{,}75$ или $\varepsilon = 0{,}7$ мм.

Ответ: $P \approx 0{,}05, \ \varepsilon = 0{,}7$.

17.18. Двумерные дискретные случайные величины

Определение 17.7. ***Законом распределения*** *дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, т.е. пар чисел* $(x_i; y_j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, *и их вероятностей* $p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j)$.

Закон распределения для двумерной дискретные случайной величины задается в виде таблицы с двойным входом, в которой указывают все значения x_i, y_i и вероятности p_{ij}.

$\xi \backslash \eta$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}

Пример 17.28. *Задана дискретная двумерная случайная величина* (ξ, η)*:*

$\xi \backslash \eta$	*4*	*7*	*8*
3	*0,1*	*0,2*	*0,1*
5	*0,3*	*0,1*	*0,2*

Найти законы распределения составляющих ξ *и* η*, математическое ожидание* ξ*, математическое ожидание* η *и корреляционный момент* $K_{\xi\eta}$*.*

► Сложив вероятности по строкам, получим закон распределения составляющей ξ:

ξ	3	5
p	0,4	0,6

Если сложим вероятности по столбцам, то придем к закону распределения составляющей η:

η	4	7	8
p	0,4	0,3	0,3

С помощью последних таблиц легко найдем математические ожидания:

$$M(\xi) = 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}6 = 4{,}2,$$
$$M(\eta) = 4 \cdot 0{,}4 + 7 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}3 = 6{,}1.$$

Умножая значения x_i на y_j компонентов случайного вектора $(\xi; \eta)$ ξ и η и в качестве вероятностей принимая значения p_{ij} из закона распределения, получим закон распределения одномерной случайной величины $\xi\eta$:

$\xi\eta$	12	20	21	24	36	40
P	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2

$M(\xi\eta) = 12 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot 0{,}3 + 21 \cdot 0{,}2 + 24 \cdot 0{,}1 + 36 \cdot 0{,}1 + 40 \cdot 0{,}2 = 25{,}4$

Применяя формулу (11.8) найдём корреляционный момент
$K_{\xi\eta} = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta) = 25{,}4 - 4{,}2 \cdot 6.1 = -0{,}22.$ ◄

Пример 17.29. *Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины* $\xi\,\eta$ $f(x;y) = a(x^2 + xy)$ *в квадрате* $D:\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2$ *и* $f(x,y) = 0$ *вне указанного квадрата. Вычислить значение постоянной* a, *плотность распределения компонент случайной величины* $\xi\,\eta$, *математические ожидания составляющих и корреляционный момент.*

►Постоянную a найдем из условия

$$\int\limits_0^2 \int\limits_0^2 f(x,y)dxdy = 1.$$

Тогда

$$a\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^2 (x^2 + xy)dy = 1$$

и после интегрирования по y получим:

$$a\int\limits_0^2 \left(2x + \frac{8}{3}\right) dx = 1.$$

Вычисляя определённый интеграл, придем к уравнению: $a \cdot 28/3 = 1$. Отсюда получим значение $a = 3/28$.

Таким образом, отличное от нуля значение плотности распределения будет

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{3}{28}(x^2 + xy), & \text{если } (x;\, y) \in\ D, \\ 0, & \text{если } (x;\, y) \notin\ D. \end{cases}$$

Математические ожидания случайных величин ξ и η определятся как

$$M(\xi) = \int\limits_0^2 \int\limits_0^2 xf(x,y)dxdy = \frac{3}{28}\int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^2 (x^2 + xy)dy = \frac{10}{7},$$

$$M(\eta) = \int\limits_0^2 \int\limits_0^2 yf(x,y)dxdy = \frac{3}{28}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^2 y(x^2 + xy)dy = \frac{8}{7}.$$

Найдём плотность распределения компонент случайной величины $\xi\,\eta$.

При $x \in [0;2]$

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x;y)dy = \frac{3}{28}\int\limits_0^2 (x^2+xy)dy = \frac{3}{28}\left(x^2y + x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{3}{14}(x^2+x).$$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [0;2], \\ \dfrac{3}{14}(x^2+x), & \text{если } x \in [0;2]. \end{cases}$$

При $y \in [0;2]$

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x;y)dx = \frac{3}{28}\int\limits_0^2 (x^2+xy)dx = \frac{3}{28}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2y}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{3}{28}\left(\frac{8}{3} + 2y\right).$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [0;2], \\ \dfrac{3}{28}\left(\dfrac{8}{3} + 2y\right), & \text{если } y \in [0;2]. \end{cases}$$

Проверяем выполнения основных свойств функции плотности: 1) $f(x) \geqslant 0$ и 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Первое свойство для обеих функций выполняется, т.к. на отрезке $[0;2]$ они неотрицательны, а вне его равны нулю.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{3}{14}(x^2+x)dx = \frac{3}{14}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{3}{14}\left(\frac{8}{3} + 2\right) = 1.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\eta(y)dy = \int\limits_0^2 \frac{3}{28}\left(\frac{8}{3} + 2y\right)dy = \frac{3}{28}\left(\frac{8}{3}y + y^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{3}{28}\left(\frac{16}{3} + 4\right) = 1.$$

Осталось найти корреляционный момент.

$$K_{\xi\,\eta} = M(\xi\,\eta) - M(\xi)M(\eta)$$

$$M(\xi\,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x;y)dxdy = \frac{3}{28}\int\limits_0^2\int\limits_0^2 (x^2+xy)dxdy =$$
$$= \frac{3}{28}\int\limits_0^2 \left(x^2y + x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2 dx = \frac{3}{28}\int\limits_0^2 (2x^2+2x)\,dx =$$
$$= \frac{3}{28}\left(\frac{2x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{3}{28}\left(\frac{16}{3}+4\right) = 1.$$
$$K_{\xi\,\eta} = M(\xi\,\eta) - M(\xi)M(\eta) = 1 - \frac{10}{7}\cdot\frac{10}{7} = -\frac{31}{49}.$$

◄

17.19. Введение в математическую статистику

Определение 17.8. ***Медиана*** *— значение варианты, для которого количество элементов находящихся слева и справа, одинаково.*

Т.е., значение M_e, при котором $F^*(M_e) = 0{,}5$.

Для простой статистической совокупности медиана вычисляется следующим образом. Исследуемая выборка случайной величины ξ сортируется в порядке не убывания значений элементов. Далее, если объём выборки нечётное число, то $M_e = x_{(n+1)/2}$, иначе $M_e = (x_{n/2} + x_{n/2+1})/2$.

Например, для вариационного ряда $\{1, 3, 5, 7, 9, 9, 12\}$ медиана равна четвёртому элементу $M_e = 7$, а для вариационного ряда $\{1, 3, 5, 7, 9, 12\}$ медиана равна среднему третьего и четвёртого элементов $M_e = (5 + 7)/2 = 6$.

Определение 17.9. ***Модой*** M_0 *называется варианта, которая имеет наибольшую частоту по сравнению с другими частотами.*

В вариационном ряду мода — это та варианта, которой соответствует наибольшая частота.

Для простой статистической совокупности мода вычисляется простым подсчетом.

Например, для вариационного ряда $\{2, 2, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7\}$, $M_O = 5$, т.к. значение 5 встречается чаще других.

Простейшей характеристикой распределения является ***выборочное среднее***, которое для простой статистической совокупности вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{17.34}$$

Если данные сгруппированы, то:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot x_i. \tag{17.35}$$

Для характеристики разброса значений случайной величины относительно её среднего значения используется ***выборочная дисперсия***

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} \tag{17.36}$$

для простой совокупности и

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - \bar{x})^2 \qquad (17.37)$$

для сгруппированного распределения.

$$S = \sqrt{S^2} \qquad (17.38)$$

называется ***выборочным средним квадратическим отклонением*** (СКО).

На практике вместо формулы (17.36) бывает удобнее применять другую:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \qquad (17.39)$$

для простой совокупности и

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^2 - (\bar{x})^2 \qquad (17.40)$$

для сгруппированного распределения.

При малых объёмах выборки n для оценки дисперсии σ^2 используют **исправленную** выборочную дисперсию ${S^*}^2$:

$${S^*}^2 = \frac{n}{n-1}\,S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \qquad (17.41)$$

Оценка ${S^*}^2$ является ***несмещённой***, состоятельной оценкой дисперсии σ^2.

Формула (17.41) позволяет вычислять ${S^*}^2$ для простой совокупности. Для сгруппированных данных используют аналогичную формулу (17.42):

$${S^*}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - \bar{x})^2. \qquad (17.42)$$

Замечание 17.2. *Исправленное СКО S^* является* ***несмещённой*** *оценкой СКО S.*

Пример 17.30. *Из генеральной совокупности извлечена выборка:*

x_i	*0,9*	*1*	*1,2*	*1,4*	*1,5*
m_i	*10*	*25*	*20*	*15*	*10*

Найти моду, медиану, несмещённую выборочную дисперсию и несмещённое выборочное среднее квадратическое отклонение.

Р е ш е н и е:
Объём выборки $n = 10 + 25 + 20 + 15 + 10 = 80$.
Мода $M_o = 1$, медиана $M_e = 1{,}2$.
Найдем выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_i x_i = \frac{1}{80}(10\cdot 0{,}9 + 25\cdot 1 + 20\cdot 1{,}2 + 15\cdot 1{,}4 + 10\cdot 1{,}5) = 1{,}175.$$

Находим выборочную дисперсию:

$$S^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^2 - 1{,}175^2 =$$

$$= \frac{1}{80}(10\cdot 0{,}9^2 + 25\cdot 1^2 + 20\cdot 1{,}2^2 + 15\cdot 1{,}4^2 + 10\cdot 1{,}5^2) - (1{,}175)^2 =$$

$$= 113{,}8 - 1{,}380625 \approx 0{,}04187.$$

Несмещённая выборочная дисперсия равна

$$S^{*^2} = \frac{80}{79}S^2 \approx 0{,}042405.$$

Несмещённое выборочное среднее квадратическое отклонение $S^* = \sqrt{0{,}042405} \approx 0{,}206$.

Пример 17.31. *Получена числовая выборка {1; 2; 1; 2; 6; 3; 1; 4; 6; 1; 4; 6; 6; 2; 6; 6; 7; 8; 2, 6} некоторой случайной величины ξ. Найти её моду, медиану, выборочное среднее, исправленную выборочную дисперсию и эмпирическую функцию распределения.*

Р е ш е н и е:
Объем выборки $n = 20$. Сгруппируем результаты выборки в таблицу.

x_i	1	2	3	4	6	7	8
m_i	4	4	1	2	7	1	1

Мода равна 6, медиана 4.

Найдём выборочное среднее $\bar{x}$ и несмещённую выборочную дисперсию S^{*2}.

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1}{20} = \frac{80}{20} = 4.$$

$$\overline{x^2} = \frac{1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 1 + 4^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 7 + 7^2 \cdot 1 + 8^2 \cdot 1}{20} = \frac{426}{20} = 21{,}3.$$

$$S^{*2} = \frac{20}{19}\left(\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right) = 21{,}3 - 16 \approx 5{,}579.$$

Для определения эмпирической функции $F^*(x)$ распределения находим массив относительных частот P^*.

$$P^* = \{m_i/n\} = \{4/20, 4/20, 1/20, 2/20, 7/20, 1/20, 1/20\}.$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ 4/20, & x > 1x \leqslant 2, \\ 8/20, & x > 2x \leqslant 3, \\ 9/20, & x > 3x \leqslant 4, \\ 11/20, & x > 4x \leqslant 6, \\ 18/20, & x > 6x \leqslant 7, \\ 19/20, & x > 7x \leqslant 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

Пример 17.32. *Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма $n = 50$, результаты которой сгруппированы с постоянным размахом интервала h=4 и помещены в таблицу.*

i	1	2	3	4	5	6
$(x_i; x_{i+1}]$	(10; 14]	(14; 18]	(18; 22]	(22; 26]	(26; 30]	(30; 34]
m_i	4	11	15	12	6	2

1) Построить гистограмму относительных частот по сгруппированным данным, где m_i – частота попадания вариант в промежуток $(x_i; x_{i+1}]$.

2) На основании данного распределения, найти выборочную среднюю $\overline{x}$, несмещённую выборочную дисперсию S^{*2}.

1) ►Находим вектор относительных частот наблюдений, попавших в i-тый интервал $P_i^* = \dfrac{m_i}{n}$.

$P^* = \{4/50, 11/50, 15/50, 12/50, 6/50, 2/50\} =$
$= \{0.08, 0.22, 0.3, 0.24, 0.12, 0.04\}$.

Делим полученный вектор относительных частот на размах интервалов $h = 4$, получаем вектор плотности относительной частоты.

$\dfrac{P^*}{h} = \{4/200, 11/200, 15/200, 12/200, 6/200, 2/200\} =$
$= \{0.02, 0.055, 0.075, 0.06, 0.03, 0.01\}$.

Строим график, рис. 58, состоящий из шести прямоугольников ширина каждого из них равна 4, а высота $\dfrac{P_i^*}{h}$. Площадь полученной фигуры равна 1. Если увеличивать объём выборки и количество интервалов, то верхняя линия гистограммы приближается к функции плотности генеральной совокупности непрерывной случайной величины.

2) ►Находим выборочную среднюю $\overline{x}$, несмещённую выборочную дисперсию S^{*2}.

При задании выборки в виде группового распределения по интервалам, для вычисления выборочных средних значений, частоты относят к центру интервалов (массив координат $D = \{12, 16, 20, 24, 28, 32\}$).

По формуле (17.35) находим выборочную среднюю $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} m_i d_i =$

$= \dfrac{1}{50}(4 \cdot 12 + 11 \cdot 16 + 15 \cdot 20 + 12 \cdot 24 + 6 \cdot 28 + 2 \cdot 32) = 20{,}88.$

По формуле (17.39) находим выборочную дисперсию

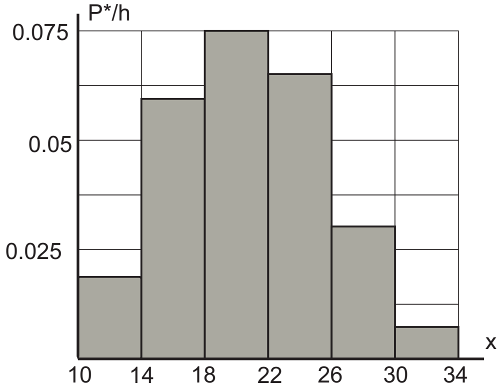


Рис. 58. *Гистограмма*

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot d_i^2 =$$
$$= \frac{1}{50}(4 \cdot 12^2 + 11 \cdot 16^2 + 15 \cdot 20^2 + 12 \cdot 24^2 + 6 \cdot 28^2 + 2 \cdot 32^2) = 461{,}12.$$
$$S^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 461{,}12 - 20{,}88^2 = 25{,}146.$$

По формуле (17.41) находим несмещённую выборочную дисперсию:
$$S^{*^2} = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{50}{49} \cdot 25{,}146 = 25{,}659.$$

Несмещённое выборочное средне квадратическое отклонение
$S^* = \sqrt{S^{*^2}} = 5{,}066.$

Пример 17.33. *Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормального распределения, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$, выборочное среднее $\bar{x} = 32$ и объём выборки $n = 36$.*

Необходимый теоретический материал из лекции 7.

Определение 17.10. *Доверительным интервалом для несмещённого параметра a называют интервал $(a_1; a_2)$ со случайными границами, зависящими от наблюдений: $a_1 = a_1(x_1, \ldots, x_n)$, $a_2 = a_2(x_1, \ldots, x_n)$, накрывающий неизвестный параметр с заданной вероятностью γ: $P\{a \in (a_1; a_2)\} = \gamma$. Вероятность γ называется доверительной вероятностью или надежностью доверительного интервала.*

Обычно γ задают равным $0{,}95; 0{,}99$ и более.

Доверительный интервал $\mathbf{I}_\gamma$ для неизвестного математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии имеет вид:

$$\mathbf{I}_\gamma\left(\bar{x}-\tau_{\frac{\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}+\tau_{\frac{\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \tag{17.43}$$

где величина $\tau_{\frac{\gamma}{2}}$ определяется из уравнения:

$$\Phi(\tau_{\frac{\gamma}{2}})=\frac{\gamma}{2} \tag{17.44}$$

Р е ш е н и е: В данном примере воспользуемся выражением (17.43). Поскольку здесь $\gamma=0{,}99$, то параметр $\tau_{\frac{\gamma}{2}}$ найдем с помощью равенства:

$$\Phi(\tau_{\frac{\gamma}{2}})=\frac{\gamma}{2}=\frac{0{,}99}{2}=0{,}495.$$

Отсюда по таблицам функции Лапласа определим $\tau_{\frac{\gamma}{2}}=2{,}57$. Здесь левая граница интервала

$$\bar{x}-\tau_{\frac{\gamma}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=32-2{,}57\cdot\frac{3}{6}=32-1{,}285=30{,}715.$$

Правая граница определится как $32+1{,}285=33{,}285$. Таким образом, искомый доверительный интервал для математического ожидания a будет

$$30{,}715<a<33{,}285.$$

Пример 17.34. *Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма* $n = 16$*:*

x_i	3,5	4,1	4,7	5,4	5,6	6,2
m_i	2	3	2	4	3	2

Оценить с надежностью 0,95 *математическое ожидание a нормально распределённой случайной величины по выборочному среднему с помощью доверительного интервала.*

Доверительный интервал $\mathbf{I}_\gamma$ *для неизвестного математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии имеет вид:*

$$\mathbf{I}_\gamma \left(\bar{x} - t_\gamma \frac{S^*}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + t_\gamma \frac{S^*}{\sqrt{n}}\right), \tag{17.45}$$

где величина t_γ определяется по таблице приложения 3 критических точек распределения Стьюдента для $\alpha = 1 - \gamma$ и $k = n - 1$.

Р е ш е н и е: В данном случае дисперсия неизвестна и доверительный интервал определяется по формуле (17.45). Выборочное среднее вычислим по формуле (17.35):

$$\bar{x} = \frac{1}{16}(2 \cdot 3,5 + 3 \cdot 4{,}1 + 2 \cdot 4{,}7 + 4 \cdot 5{,}4 + 3 \cdot 5{,}6 + 2 \cdot 6{,}2) \approx 4{,}969.$$

Выборочную дисперсию удобнее искать с помощью выражения (17.40):

$$S^2 = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{6} m_i x_i^2 - 4{,}969^2 \approx 2{,}426.$$

Согласно (17.41), исправленная выборочная дисперсия

$$S^{*2} = \frac{16}{15} \cdot 2{,}426 = 2{,}587.$$

Отсюда находим исправленное СКО $S^* \approx 1{,}608$. При $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}05$ и числе степеней свободы $n - 1 = 15$ из таблицы приложения 3 определим $t_\gamma = 2{,}13$. Находим радиус доверительного интервала

$$\varepsilon = t_\gamma \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}} \approx 0{,}8356.$$

Находим доверительный интервал

$$I_\gamma = [\bar{x} - \varepsilon;\ \bar{x} - \varepsilon] = [4{,}133;\ 5{,}805].$$

Пример 17.35. *Случайная величина ξ генеральной совокупности распределена нормально при этом известно средне квадратическое отклонение $\sigma = 2$.*

1) С надежностью $\gamma_1 = 0{,}9$, $\gamma_1 = 0{,}95$ и $\gamma_2 = 0{,}99$ найти доверительные интервалы для оценки математического ожидания генеральной совокупности, если объем выборки $n = 40$ и среднее выборочное $\overline{x} = -5$.

2) Как изменится радиусы доверительных интервалов при увеличении объёма выборки в четыре раза тех же значениях среднего квадратического отклонения и надёжности.

Р е ш е н и е:

Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии имеет вид (17.43): $\left(\bar{x} - \tau_{\gamma/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + \tau_{\gamma/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где величина $\tau_{\gamma/2}$ определяется из уравнения (17.44): $\Phi(\tau_{\gamma/2}) = \frac{\gamma}{2}$.

1) Найдём значения величин $\tau_{\gamma_1/2}, \tau_{\gamma_2/2}, \tau_{\gamma_3/2}$.

$$\Phi(\tau_{\gamma_1/2}) = \frac{\gamma_1}{2} = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45.$$

Отсюда, по таблицам функции Лапласа определим $\tau_{\gamma_1/2} = 1{,}65$.

Аналогично,

$$\Phi(\tau_{\gamma_2/2}) = 0{,}475 \Rightarrow \tau_{\gamma_1/2} = 1{,}96.$$
$$\Phi(\tau_{\gamma_3/2}) = 0{,}495 \Rightarrow \tau_{\gamma_1/2} = 2{,}58.$$

Находим радиусы доверительных интегралов $\epsilon_i, i = 1, 2, 3$,

$$\epsilon_i = \tau_{\gamma_i/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$\epsilon_1 = 0{,}522; \quad \epsilon_2 = 0{,}620; \quad \epsilon_3 = 0{,}816.$

Мы видим, что радиусы доверительных интегралов с увеличением надёжности расширяются.

Находим доверительные интервалы.

$I_1 = [-5{,}522; -4{,}478]; \quad I_2 = [-5{,}62; -4{,}38]; I_3 = [-5{,}816; -4{,}184].$

2) При увеличении объёма выборки в четыре раза, радиус доверительного интервала уменьшиться в два раза
$\epsilon_1 = 0{,}261; \quad \epsilon_1 = 0{,}310; \quad \epsilon_1 = 0{,}409$
и доверительные интервалы будут равны

$I_1 = [-5{,}261; -4{,}439]; \quad I_2 = [-5{,}31; -4{,}69]; I_3 = [-5{,}408; -4{,}592].$

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	7802	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Продолжение таблицы приложения 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0217	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0045
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

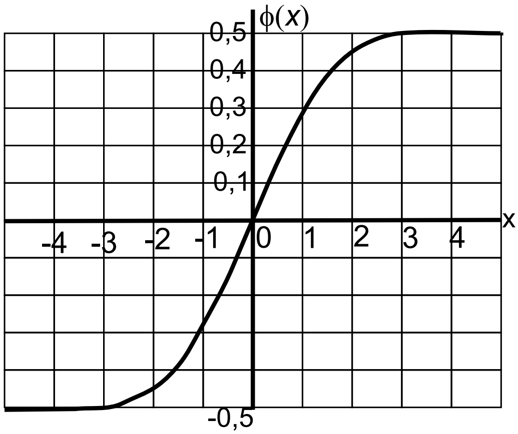


Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Продолжение таблицы приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29