РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика
и программирования

Теория вероятностей, математическая статистика

Консультация к экзамену

Для студентов ИИТ

Берков Николай Андреевич

28 июня 2022г

1. Из колоды 36 карт наугад выбираются две карты. С какой вероятностью это будет две «дамы»?

2. Пусть выбирается наугад точка в единичном квадрате. С какой вероятностью она окажется внутри вписанного в этот квадрат круга?

3. Из слова «синхрофазотрон» наугад выбирается буква. С какой вероятностью это будет буква «о», при условии, что эта буква гласная?

4. Пусть дискретная случайная величина ξ задана следующей таблицей:

$\xi_1 = 1$	$\xi_2 = 2$	$\xi_3 = -5$	$\xi_4 = 0$
$p_1 = 0.1$	$p_2 = 0.2$	$p_3 = 0.4$	$p_4 = 0.1$

Найти математическое ожидание случайной величины ξ.

5. Найти дисперсию случайной величины из задачи 4.

6. Случайная величина имеет следующую плотность вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}.$$

Как называется эта случайная величина, и какое она имеет математическое ожидание?

7. Пусть случайная величина ξ имеет следующую плотность вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 1/3, & x \in [5, 8], \\ 0, & x \notin [5, 8], \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $E[\xi]$.

8. Пусть имеется следующая выборка:

$$X = (3, 5, 0, 1, -4).$$

Найти выборочное математическое ожидание.

9. Найти выборочную дисперсию по выборке из задачи 8.

Пример 17.1. *Из колоды в 36 карт наугад вынимают 3 карты. Найти вероятность того, что взяли три карты бубновой масти .*

►В колоде карт всего 9 карт бубновой масти. Искомое событие A происходит когда вытаскивают три карты бубновой масти. Применяем формулу произведения для совместных случайных событий.

$$P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) = \frac{9}{36}\frac{8}{35}\frac{7}{34} = \frac{7}{35 \cdot 17} \approx 0{,}012.\blacktriangleleft$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{7}{35 \cdot 17} \approx 0{,}012.$

Пример 17.2. *Из колоды в 36 карт наугад вынимают 3 карты с возвращением карты обратно в колоду. Найти вероятность того, что взяли три карты бубновой масти .*

►В колоде карт всего 9 карт бубновой масти. Искомое событие A происходит когда вытаскивают три карты бубновой масти. Применяем формулу произведения для не совместных случайных событий.

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{9}{36}\frac{9}{36}\frac{9}{36} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \approx 0{,}0156.\blacktriangleleft$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{64} \approx 0{,}0156.$

Пример 17.3. *В коробке находится 16 маркеров: 8 синих, 5 красных и 3 чёрных. Наугад взяли 4 маркера. Найти вероятность того, что все они красные.*

►Пусть A — событие состоящее в том, что из коробки взяли 4 красные маркеры.

Применяем формулу произведения для совместных случайных событий.

$$P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)P(A_4/A_1A_2A_3) = \frac{5}{16}\frac{4}{15}\frac{3}{14}\frac{2}{13} = \frac{1}{364} \approx 0{,}027.\blacktriangleleft$$

Ответ: $P(A) = \frac{1}{364} \approx 0{,}027.$

Пример 17.4. *В коробке находится 16 маркеров: 8 синих, 5 красных и 3 чёрных. Наугад взяли 4 раза маркер с возвращением каждый раз маркер в урну. Найти вероятность того, что взяли 4 красные маркеры.*

►Пусть A — событие состоящее в том, что из коробки взяли 4 красные маркеры.

Применяем формулу произведения для не совместных случайных событий.

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) =$$

$$= \left(\frac{5}{16}\right)^4 = \frac{625}{65536} \approx 0{,}0095.\blacktriangleleft$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{625}{65536} \approx 0{,}0095.$

Задание для самостоятельного решения

1.1. В урне 13 белых и 8 чёрных шаров. Из урны по очереди вынимают два шара, каждый раз возвращая вынутый шар в урну. Найти вероятность того, что попадались только белые шары.

2.1. В коробке находится 10 синих, 8 красных и 2 чёрных маркеров. Случайным образом вынимают два маркера. Найти вероятность того, что оба маркера будут красные.

3.1. Из урны содержащей 13 белых и 8 чёрных шаров случайным образом вынимают два шара. Найти вероятность того, что попадались только чёрные шары.

4.1. В коробке находится 12 красных и 8 чёрных маркеров. Из коробки по очереди дважды вынимают маркер, каждый раз возвращая вынутый маркер в коробку. Найти вероятность того, что попадались только чёрные маркеры.

5.1. В коробке лежат мячики: 5 красных, 4 желтых, 3 синих и 2 зеленых. Дети взяли наугад 2 мячика. Найти вероятность, того что оба мячика синего цвета.

Задание 2

Пример 17.5. *В круг с радиусом R=10см наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка попадет внутрь вписанного в круг прямоугольника одна сторона которого равна 16см.*

►Диагональ прямоугольника является диаметром круга. Используя теорему Пифагора, найдём вторую сторону прямоугольника.

$b^2 = 20^2 - 16^2 = (20-16)(20+16) = 4 \cdot 36. \quad \Rightarrow \quad b = 12.$

$$P(A) = \frac{S_{\text{пр}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{12 \cdot 16}{\pi \cdot 10^2} = \frac{48}{25\pi} \approx 0{,}611. \blacktriangleleft$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{48}{25\pi} \approx 0{,}611.$

Пример 17.6. *В круг с радиусом R=10см наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка не попадет внутрь вписанного в круг прямоугольника одна сторона которого равна 16см.*

►Диагональ прямоугольника является диаметром круга. Используя теорему Пифагора, найдём вторую сторону прямоугольника.

$b^2 = (20^2 - 16^2 = (20-16)(20+16) = 4 \cdot 36. \quad \Rightarrow \quad b = 12.$

$$P(A) = 1 - \bar{A} = 1 - \frac{S_{\text{пр}}}{S_{\text{круга}}} = 1 - \frac{48}{25\pi} \approx 0{,}389. \blacktriangleleft$$

Ответ: $P(A) = 1 - \dfrac{48}{25\pi} \approx 0{,}389.$

Задание для самостоятельного решения

1.2. В круг наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

2.2. В круг наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется вне вписанного в круг квадрата.

3.2. В прямоугольник стороны которого равны 10 и 20см, наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка попадет внутрь равнобедренного треугольника вписанного в прямоугольник. Общая сторона фигур равна 20см.

4.2. В круг с радиусом R=5см наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка попадет внутрь вписанного в круг прямоугольника одна сторона которого равна 3см.

5.2. В прямоугольник стороны которого равны 12 и 15см наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка попадет вне круга вписанного в прямоугольник.

6.2. В круг с радиусом R=10см наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг прямоугольного треугольника один из катетов которого равен 16см.

Задание 3

Пример 17.7. *Из слова «синхрофазатрон» наугад выбирается буква. С какой вероятностью эта будет буква «о», при условии, что эта буква гласная.*

►Эта задача на условную вероятность. Пусть A – из слова «синхрофазатрон» наугад вытащить букву «о». Мы знаем, что событие B – вытащить гласную букву, произошло. Поэтому задача сводится к следующей: имеются 5 гласных букв, среди которых две буквы «о». Найти вероятность вытащить букву «о».

$P(A/B) = \frac{2}{5} = 0{,}4.$ ◄

Ответ: 0,4.

Пример 17.8. *Из слова «привет» наугад выбирается буква. С какой вероятностью эта будет буква «в», при условии, что эта буква согласная.*

►$P(A/B) = \frac{1}{4} = 0{,}25$. ◄

Ответ: 0,25.

Пример 17.9. *В коробке находится 12 красных и 8 чёрных маркеров. Из коробки дважды вынимают маркер, не возвращая вынутый маркер в коробку. Найти вероятность того, что второй маркер будет чёрным, при условии, что первый был красным.*

►Пусть A – событие состоящее в том, что второй маркер будет чёрным и B – первый был красным.

$$P(A/B) = \frac{8}{19}.$$

◄

Пример 17.10. *В коробке находится 12 красных и 8 чёрных маркеров. Из коробки дважды вынимают маркер, не возвращая вынутый маркер в коробку. Найти вероятность того, что второй маркер будет чёрным, при условии, что первый был чёрным.*

►Пусть A – событие состоящее в том, что второй маркер будет чёрным и B – первый был чёрным.

$$P(A/B) = \frac{7}{19}.$$

Задание для самостоятельного решения

1.3. В урне 7 белых и 13 чёрных шаров. Из урны вынимают два шара. Какова вероятность того, что второй вынутый шар белый, если известно, что первый был чёрным?

2.3. На столе лежат вырезанные из картона фигурки: 10 синих и 4 красных кружка, 7 синих и 9 красных квадратов. Со стола наугад берут предмет. Найти вероятность того, что он синий, если известно, что это кружок.

3.3.На столе лежат вырезанные из картона фигурки: 10 синих и 4 красных кружка, 7 синих и 9 красных квадратов. Со стола наугад берут предмет. Найти вероятность, что он квадрат, если известно, что он красный.

4.3. Из колоды в 36 карт наугад выбираются две карты. Найти вероятность того, что вторая карта будет король, если известно что первая карта была дама.

5.2. В коробке лежат мячики: 5 красных, 4 желтых, 3 синих и 2 зеленых. Дети взяли наугад 2 мячика. Найти вероятность того что второй мячик будет синего цвета, если известно что первый был красный.

Задание 4,5

Пример 17.11. *Пусть дискретная случайная величина* ξ *задана следующей таблицей:*

ξ	*1*	*2*	*-5*	*0*
p	*00,1*	*0,2*	*0,4*	*0,3*

4) Найти математическое ожидание.

5) Найти дисперсию.

► $4) M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + (-5) \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}3 = -1{,}5.$

$5) D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2{,}4^2 =$

$= 1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}2 + (-5)^2 \cdot 0{,}4 + 0^2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}504 - 5{,}76 - (-1{,}5)^2 =$

$= 6{,}22 - 2{,}25 = 8{,}65.$ ◄

Ответ: $4) M(\xi) = -1{,}5.$

$5) D(\xi) = -8{,}65.$

Задание 4,5

1.4. Дискретная случайная величина ξ задана следующей таблицей:

ξ	-2	-1	0	2	5
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти математическое ожидание случайной величины ξ.

5. Найти дисперсию случайной величины ξ заданной в примере 4.

2.4. Дискретная случайная величина ξ задана следующей таблицей:

ξ	0	1	2	5	10
P	0,3	0,2	0,25	0,2	0,05

Найти математическое ожидание случайной величины ξ.

5. Найти дисперсию случайной величины ξ заданной в примере 4.

3.4. Дискретная случайная величина ξ задана следующей таблицей:

ξ	-4	-1	0	2	10
P	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Найти математическое ожидание случайной величины ξ.

5. Найти дисперсию случайной величины ξ заданной в примере 4.

4.4. Дискретная случайная величина ξ задана следующей таблицей:

ξ	-5	-1	0	2	8
P	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

Найти математическое ожидание случайной величины ξ.

5. Найти дисперсию случайной величины ξ заданной в примере 4.

5.4. Дискретная случайная величина ξ задана следующей таблицей:

ξ	0	1	2	5	10
P	0,3	0,2	0,25	0,2	0,05

Найти математическое ожидание случайной величины ξ.

5. Найти дисперсию случайной величины ξ заданной в примере 4.

Задание 6

Пример 17.12. *Непрерывная случайная величина ξ имеет следующую плотность вероятности:*

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}.$$

Как называется распределение случайной величины ξ, и чему равна её дисперсия?

►Заданная функция плотности имеет вид функции плотности для нормального закона распределения случайной величины ξ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

При этом параметры a и σ равны математическому ожиданию и среднеквадратическому отклонению, соответственно.

Приведём функцию $f(x)$ к виду функции плотности для нормального закона распределения случайной величины ξ.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ 2} e^{-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 4}}.$$

Следовательно, заданная случайная величина ξ нормально распределена и её математическое ожидание равно 3, а среднеквадратическое отклонение 2. ◄

Ответ: $M(\xi) = 3$.

Задание для самостоятельного решения

1.6. Непрерывная случайная величина ξ имеет следующую плотность вероятности: $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-2(x-4)^2}$.

Как называется распределение случайной величины ξ, и чему равна её дисперсия?

Пример 17.13. *Пусть случайная величина ξ имеет следующую плотность вероятности:*

$$f(x) = \begin{cases} 1/3, & x \in [5;8], \\ 0, & x \notin [5;8]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $E[\xi]$.

Пример 17.13. *Пусть случайная величина ξ имеет следующую плотность вероятности:*

$$f(x) = \begin{cases} 1/3, & x \in [5;8], \\ 0, & x \notin [5;8]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $E[\xi]$.

►$E[\xi] = (5+8)/2 = 6{,}5$. ◄

Задание 8,9

Простейшей характеристикой распределения является ***выборочное среднее***, которое для простой статистической совокупности вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (17.1)$$

Если данные сгруппированы, то:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot x_i. \qquad (17.2)$$

Для характеристики разброса значений случайной величины относительно её среднего значения используется ***выборочная дисперсия***

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} \qquad (17.3)$$

для простой совокупности и

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - \bar{x})^2 \qquad (17.4)$$

для сгруппированного распределения.

$$S = \sqrt{S^2} \tag{17.5}$$

называется ***выборочным средним квадратическим отклонением*** (СКО).

На практике вместо формулы (18.36) бывает удобнее применять другую:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 \tag{17.6}$$

для простой совокупности и

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^2 - (\bar{x})^2 \tag{17.7}$$

для сгруппированного распределения.

При малых объёмах выборки n для оценки дисперсии σ^2 используют **исправленную** выборочную дисперсию S^{*^2}:

$$S^{*^2} = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2. \tag{17.8}$$

Оценка S^{*^2} является ***несмещённой***, состоятельной оценкой дисперсии σ^2.

Пример 17.14. *Пусть имеется следующая выборка:* $X = (3,\ 5,\ 0,\ 1,\ -4)$.

8) Найти выборочное математическое ожидание.

9) Найти выборочную дисперсию.

► 8) $\bar{x} = \dfrac{3+5+0+1-4}{5} = 1.$

Для вычисления выборочной дисперсии используем формулу

$S^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ или $S^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$.

9) $S^2 = \dfrac{(3-1)^2 + (5-1)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2 + (-4-1)^2}{5} =$

$= \dfrac{4+16+1+0+25}{5} = \dfrac{46}{5} = 9{,}2.$

9) $S^2 = 0{,}2(3^2+5^2+0^2+1^2+(-4)^2) - 1^2 = 0{,}2(9+25+1+16) - 1 =$

$= 0{,}2 \cdot 51 - 1 = 9{,}2.$

РТУ МИРЭА

Кафедра высшей математики и программирования

Теория вероятностей, математическая статистика

Берков Николай Андреевич

28 июня 2022г

Спасибо за внимание